

## El Método de los elementos finitos en problemas de vigas

### The finite element method in problems of beams

Luis Lara Romero<sup>1</sup>

#### RESUMEN

En este artículo presentamos la aplicación del método de los elementos finitos para determinar las deformaciones verticales, deformaciones de giro, fuerzas y momentos de los elementos de una viga en voladizo y empotrada. Se muestra como se aplica los elementos barra a un problema de viga en voladizo para determinar las deformaciones en vertical y los ángulos de giro. Se aplica elementos tipo armadura un problema de viga doblemente empotrada sometida a una fuerza axial y a un problema de una viga elástica

**Palabras clave:** Elemento finitos, Refinamiento, Malla adaptativa.

#### ABSTRACT

In this article we present the application of the finite element method to determine the vertical deformations, rotational deformations, forces and moments of the elements of a cantilever and recessed beam. It shows how the beam elements are applied to a cantilever beam problem to determine the vertical deformations and the angles of rotation. Truss type elements are applied to a doubly-embedded beam problem subjected to an axial force to a problem of an elastic beam.

**Keywords:** Finite element, Refinement, Adaptive mesh.

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Trujillo - Departamento de Matemáticas.  
E-mail: llara@unitru.edu.pe

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de estructuras masivas se ha enfocado tradicionalmente desde la perspectiva de la Teoría de la Elasticidad, la cual busca resolver el problema a partir de la integración de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la cinemática de un sólido elástico. Este tratamiento es posible sólo en casos de cuerpos simples. Para estructuras complejas se hace necesario apelar a métodos numéricos, los cuales tuvieron su apogeo a partir de la invención de los computadores digitales. Es a partir de la mitad del siglo XX que comenzó el desarrollo de una alternativa que, para muchos problemas, resulta más eficiente, como el método de los elementos finitos [1] y [3]. Presentamos el método por medio de un problema de flexión en una barra en voladizo, problema de la barra empotrada, problema de la barra elástica. La investigación está dirigida a profesionales para quienes ya no resulta suficiente el estudio de estructuras compuestas por solamente barras, sino que es necesario conocer la teoría de elementos finitos que permita la solución de problemas relativos a estructuras más complejas [5].

## 2. MARCO TEÓRICO.

Una estructura es una combinación de elementos geométricos convenientemente vinculados entre sí, que accionan y reaccionan bajo los efectos de las cargas. Su finalidad es resistir y transmitir las fuerzas actuantes a sus apoyos. Una estructura posee grados de libertad que corresponden con las posibles traslaciones o rotaciones que afectan a la estructura. Una viga es un elemento constructivo lineal que trabaja principalmente a flexión. El esfuerzo de flexión provoca tensiones de tracción y compresión, produciéndole las máximas en el cordón inferior y el cordón superior respectivamente, las cuales se calculan relacionando el momento flector y el segundo momento de inercia. En las zonas cercanas a los apoyos se producen esfuerzos cortantes, Figura (1).

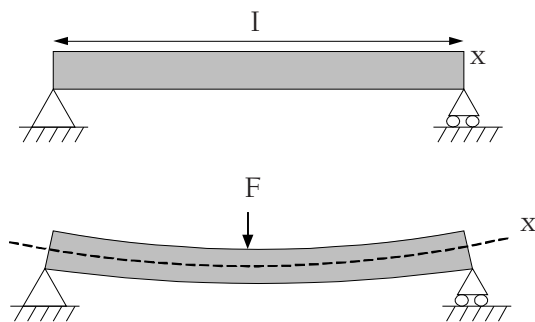


Figura 1. Ejemplo de viga  
Fuente: Elaboración propia

Una viga en voladizo aparece en la Figura (2). Se plantea la pregunta para establecer una ecuación general que relacione la carga  $p$  con el desplazamiento general de cualquier punto de la viga  $u(x)$ . Para ello se debe resolver la ecuación diferencial de la deflexión de viga donde  $M$  es el momento flector.

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -M \quad (1)$$

El resultado de la solución es:

$$u(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{L}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \quad (2)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad de la viga,  $I$ , su momento de inercia y  $L$ , la longitud de la viga.

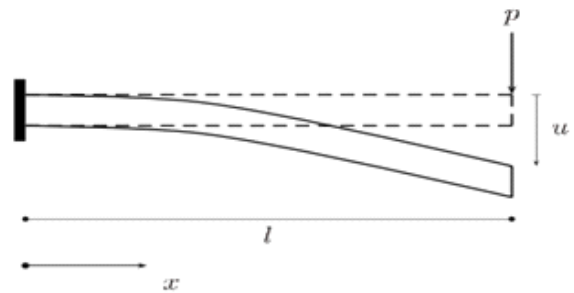


Figura 2. Viga en voladizo  
Fuente: Elaboración propia

En estructuras complejas, una ecuación como la (1) no es posible, en general, hallar su solución analítica, es decir, si se quiere tener una solución se tiene que recurrir a técnicas numéricas de aproximación. El uso de las técnicas numéricas hace necesario formular el problema en forma discreta, es decir, encontrar el valor de las respuestas estructurales sólo en algunos puntos, de manera que el cálculo de los valores en puntos adicionales se hace por interpolación.

En la Figura (3) se muestra el modelo discreto de tres barras unidas en los puntos nodales. En este caso  $u_1, u_2, u_3$  son los desplazamientos verticales bajo las cargas  $p_1, p_2, p_3$ . Este proceso se conoce con el nombre de discretización por elementos finitos.

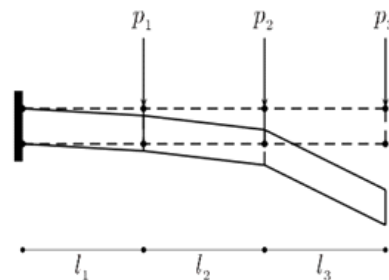


Figura 3. Discretización por elementos finitos de una viga en voladizo  
Fuente: Elaboración propia

El método de los elementos finitos (MEF es español, FEM en inglés y FEA Análisis del Elemento Finito) es un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales que modelan diversos problemas de ingeniería y física. El método consiste en dividir (discretizar) el cuerpo, estructura o dominio sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan el comportamiento físico del problema, en una serie de subdominios que se intersectan salvo en su frontera llamados elementos finitos. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio. Dentro de los elementos se distinguen una serie de puntos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto forma lo que se llama malla. Los cálculos se realizan sobre la malla, que puede ser creada a partir del dominio con programas generadores de mallas (pre proceso). De acuerdo a las relaciones de conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas sobre cada nodo (grados de libertad). La relaciones de una variable en los nodos se puede escribir en forma de un sistema de ecuaciones lineales, la matriz del sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema, donde el orden de la matriz está relacionado con el número de nodos.

## 2.1 Pasos para el Análisis de Elementos Finitos (FEA)

- **Discretización de la estructura:** la estructura es dividida en un número finito de elementos. Este paso es crucial para obtener una solución aproximada lo más exacta posible, de esta forma, se determina el tamaño o el número de elementos en cierta área o volumen sobre la cual se tenga que analizar, esto es una ventaja del método, pero a su vez el usuario debe estar conciente de esto para no generar cálculos innecesarios o soluciones erróneas.
- **Definición de las matrices de rigidez de los elementos:** se definen las propiedades físicas y geométricas del elemento.
- **Ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos:** la matriz de rigidez de un elemento, tiene sus coeficientes que son derivados del equilibrio estático, residuos ponderados o métodos de energía. En la matriz de rigidez del elemento se encuentran contenidas los desplazamientos nodales que surgen al ser aplicadas fuerzas en los nodos. El ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos, implica la aplicación del equilibrio para toda la estructura.
- **Aplicación de las cargas:** se incorporan al sistema de ecuaciones las fuerzas externas puntuales, fuerzas uniformes y momentos.

- **Definir las condiciones de contorno:** las condiciones de apoyo deben ser dadas.
- **Solucionar el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:** se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, donde los desplazamientos nodales son las variables desconocidas.
- **Cálculo de los esfuerzos:** se calcula los esfuerzos, reacciones, deformaciones u otra información relevante.
- **Generación de resultados:** se visualiza la salida de resultados en forma de tablas y gráficos.

## 2.2 Clasificación

Dependiendo de la dimensión, los elementos básicos se pueden dividir en tres categorías. Elemento línea (truss, beam), elemento área (plane stress, plane strain), elemento de volumen (solid o brick, tetrahedral, hexahedral).

## 2.3. Tipos de elementos

Los elementos más utilizados son: armadura (truss), viga (beam), plane stress, plane strain (tensión plana), axisymmetric, membrane, plate, Shell, solid o brick, tetrahedral, boundary, gap.

### 2.3.1. Elemento armadura

**Elemento Truss:** es un elemento caracterizado básicamente porque sólo puede comportarse como un miembro sometido a dos fuerzas: cargas dirigidas a lo largo del eje longitudinal del elemento. En el elemento truss su longitud es mucho mayor que sus alto o ancho, está conectada con el resto de la estructura con pasadores que no transfieren momentos, las cargas externas solo son aplicables en el extremo de los elementos y son paralelas al mismo (carga axial). Los elementos truss solo pueden ser sometidos a tracción o compresión. El elemento armadura (1D) tiene dos nodos situados generalmente en los extremos del elemento y un grado de libertad por nodo haciendo un total de dos grados de libertad por elemento generando una matriz elemento de orden dos. En las Figuras (4) y (5) se muestran  $u_1^{(e)}$ ,  $u_2^{(e)}$  los desplazamientos a lo largo del eje axial producidas por las fuerzas axiales  $f_1^{(e)}$ ,  $f_2^{(e)}$  aplicada en los nodos  $x_1^{(e)}$ ,  $x_2^{(e)}$  respectivamente.

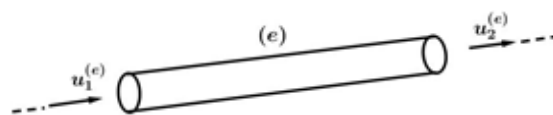


Figura 4. Desplazamientos axiales en el elemento armadura unidimensional  
Fuente: Elaboración propia

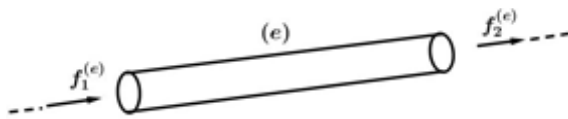


Figura 5. Fuerzas axiales en el elemento armadura unidimensional  
Fuente: Elaboración propia

2.3.2. Elemento viga

**Elemento Beam:** es un elemento formado por un material que se comporta de forma lineal elástica e isotrópica, la viga esta hecha de un solo material y una sección transversal única, las deformaciones laterales de la sección transversal son nulas, es decir, el material de la viga tiene un coeficiente de Poisson igual a cero, las cargas deben ser aplicadas únicamente en los nodos del elemento, mientras que las cargas distribuidas requieran un tratamiento especial. El elemento viga (1D) tiene dos nodos (situados generalmente en los extremos del elemento) y tres grados de libertad por nodo haciendo un total de seis grados de libertad por elemento generando una matriz elemento de orden seis. En la Figura (6) se muestra  $u^{(e)}$ ,  $u^{(e)}$  desplazamientos horizontal (longitudinal)  $u_1^{(e)}$ ,  $u_2^{(e)}$  desplazamientos vertical (transversal) y  $\theta_1^{(e)}$ ,  $\theta_2^{(e)}$  rotaciones alrededor del eje z.

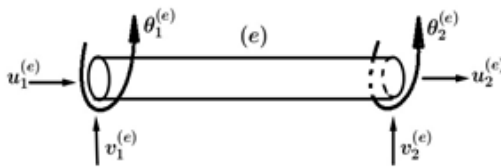


Figura 6. Desplazamiento horizontal, vertical y rotación del elemento viga unidimensional  
Fuente: Elaboración propia

En la Figura (7) se muestra  $f_1^{(e)}$ ,  $f_1^{(e)}$  fuerzas axiales horizontales,  $g_1^{(e)}$ ,  $g_1^{(e)}$  fuerzas transversales verticales,  $m_1^{(e)}$ ,  $m_1^{(e)}$  momentos de fuerza alrededor del eje z.

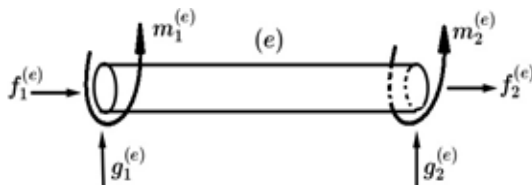


Figura 7. Fuerzas axiales horizontales, verticales y momentos del elemento viga unidimensional  
Fuente: Elaboración propia

Para el caso particular del elemento beam de eje recto sin desplazamientos ni fuerzas axiales horizontales tiene la forma de las Figuras (8) y Figuras (9), respectivamente.

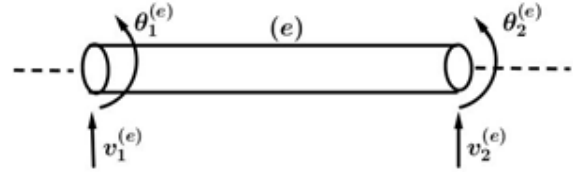


Figura 8. Elemento viga con tensión transversal y rotación alrededor del eje z.  
Fuente: Elaboración propia

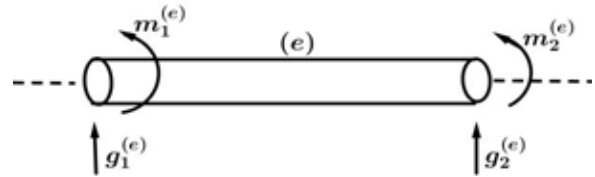


Figura 9. Elemento viga con fuerzas transversales y momentos alrededor del eje z.  
Fuente: Elaboración propia

Este tipo de elemento viga tiene dos nodos situados en los extremos del elemento con dos grados de libertad por nodo, haciendo un total de cuatro grados de libertad por elemento. En la Figura (10) se puede ver un elemento tipo viga como parte de una estructura.

2.3.3. Viga en voladizo

Cantiliver es una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, como la de un trampolín de natación. La viga en cantiliver esta sujeta a condiciones de frontera en su extremo fijo como los indica la Figura (2).



Figura 10. Elemento tipo viga  
Fuente: Elaboración propia

3. APLICACIONES

Presentamos aplicaciones de la técnica numérica de los elementos finitos a problemas de flexión de un viga en voladizo, problema de la barra empotrada y el problema de la barra elástica.

### 3.1 Problema de flexión en una viga en voladizo

Se considera una barra uniforme tipo cantiléver de longitud tres metros sometida a una posible carga puntual  $p$  en el extremo libre de la barra, Figura (2). El lado fijo de este modelo no tiene desplazamiento y su ángulo de deflexión por lo tanto es cero, mientras que el extremo opuesto presenta una condición contraria. Estas situaciones son conocidas como condiciones de contorno y pueden ser representadas en la siguiente forma:

Extremo fijo (empotrado)

$$(x=0): u(0)=0, u'(0)=0 \quad (3)$$

Extremo libre

$$(x=L): u''(L)=0, u'''(L)=0 \quad (4)$$

#### 3.1.1. Discretización de la barra

Se discretiza la barra en tres partes iguales con elementos viga con dos nodos en los extremos del elemento y dos grados de libertad por nodo (corte vertical y giro alrededor el eje z).

En la Figura (11) se muestra la discretización de la barra en tres elementos uniformes y cuatro nodos globales.

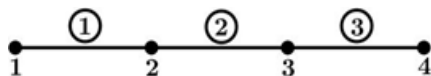


Figura 11. Discretización de la barra

Fuente: Elaboración propia

Utilizamos el vector de deformación-rotación sobre la viga

$$U = (v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \ v_3 \ \theta_3 \ v_4 \ \theta_4)$$

donde  $v_1, v_2, v_3, v_4$  son los desplazamientos verticales y  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  deformaciones de giro como se pueden ver en la Figura (12).

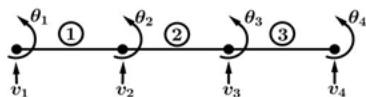


Figura 12. Numeración de variables globales

Fuente: Elaboración propia

En Figura (13) se muestra la relación entre las variables globales y las variables locales

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^{(1)}, & \theta_1 &= \theta_1^{(1)} \\ v_2 &= v_2^{(1)} = v_1^{(2)}, & \theta_2 &= \theta_2^{(1)} = \theta_1^{(2)} \\ v_3 &= v_2^{(2)} = v_1^{(3)}, & \theta_3 &= \theta_2^{(2)} = \theta_1^{(3)} \\ v_4 &= v_2^{(3)}, & \theta_4 &= \theta_2^{(3)} \end{aligned}$$

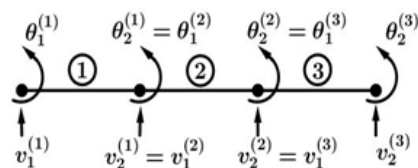


Figura 13. Numeración de variables locales

Fuente: Elaboración propia.

Ahora damos la matriz de compatibilidad que relaciona los grados de libertad global con los grados de libertad local.

Tabla 01. Numeración global y local de nodos

Nodo global	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
1	1	0	0
2	2	0	0
3	3	1	0
4	4	2	0
5	0	3	1
6	0	4	2
7	0	0	3
8	0	0	4

Fuente: Elaboración propia.

#### 3.1.2 Ensamblaje de la matriz de rigidez global

La matriz asociada a los elementos viga con dos nodos y dos grados de libertad por nodo (desplazamiento transversal y de giro) es dada por

$$k^{(e)} = 2 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $L$  es la longitud del elemento ( $m$ ),  $E$  módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young ( $N/m^2$ ) y  $I$  es la sección de momento de inercia (o momentos de área) de una sección de la viga.

Para cada uno de los elementos  $e$  se tiene el sistema elemento  $k^e v^{(e)} = g^{(e)}$  con  $L=lm$ , dado por:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(e)} \\ m_1^{(e)} \\ g_2^{(e)} \\ m_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez  $k^{(1)}$  ensamblada en la matriz de rigidez global  $K^{(1)}$  queda en la forma siguiente:



$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez  $k^{(2)}$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez  $k^{(3)}$

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz de rigidez global es:

$$K = \sum_{e=1}^3 K^{(e)} \quad (6)$$

$$k = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3.1.3 Ensamblaje de la matriz de rigidez global

El vector  $g^{(e)}$  ensamblado en el vector de desplazamiento global  $G^e$  es:

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ m_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ m_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1^{(2)} \\ m_1^{(2)} \\ g_2^{(2)} \\ m_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_1^{(3)} \\ m_1^{(3)} \\ g_2^{(3)} \\ m_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde

$$G = \sum_{e=1}^3 G^{(e)}$$

Es dado en las variables globales por:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ m_1 \\ g_2 \\ m_2 \\ g_3 \\ m_3 \\ g_4 \\ m_4 \end{bmatrix}$$

### 3.1.4 Ensamblaje de la matriz de rigidez global

Así tenemos el sistema de ecuaciones lineales de la forma  $KU = G$  donde  $K$  es la matriz de rigidez global,  $U$  es el vector de incógnitas y  $G$  es el vector de desplazamiento transversal dado por:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ m_1 \\ g_2 \\ m_2 \\ g_3 \\ m_3 \\ g_4 \\ m_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Observar que la matriz de rigidez  $K$  es una matriz singular, lo cual se puede verificar analizando el determinante igual a cero, como consecuencia  $K$  es no invertible. Esto se debe a que el sistema está sobre determinado ya que falta agregar las condiciones de contorno del problema al sistema de ecuaciones.

### 3.1.5. Imposición de las condiciones de contorno al sistema de ecuaciones

Debido a las condiciones de contorno de la viga empotrada en el extremo izquierdo se tiene  $v_1=0$  (deformación vertical apoyo) y  $\theta_1 = 0$  (deformación tipo giro apoyo) y una carga puntual de  $p$  Newton aplicada en el extremo derecho de la viga, así tenemos que  $g_4 = -p$ , el signo negativo se debe a la dirección contraria a la dirección positiva de las deflexiones.

Entonces el sistema (9) es equivalente al sistema reducido:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

El sistema (10) es obtenido debido a que los elementos sobre la viga son uniformes. Considerando el módulo de elasticidad  $E = 1000 \text{ N/m}^2$  y la constante de inercia  $I = 100 \text{ m}^4$  con  $L=1\text{m}$  se resuelve el sistema para obtener la solución:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.0000 \text{ mm} \\ \theta_1 &= 0.00000 \text{ rad/mm} \\ v_2 &= -0.00133 \text{ m} = -1.33 \text{ mm} \quad \theta_2 = \\ &= -0.00250 \text{ rad} = -2.50 \text{ rad/mm} \quad v_3 = \\ &= -0.00467 \text{ m} = -4.67 \text{ mm} \\ \theta_3 &= -0.00400 \text{ rad} = -4.00 \text{ rad/mm} \quad v_4 = \\ &= -0.00900 \text{ m} = -9.00 \text{ mm} \\ \theta_4 &= -0.00450 \text{ rad} = -4.50 \text{ rad/mm} \end{aligned}$$

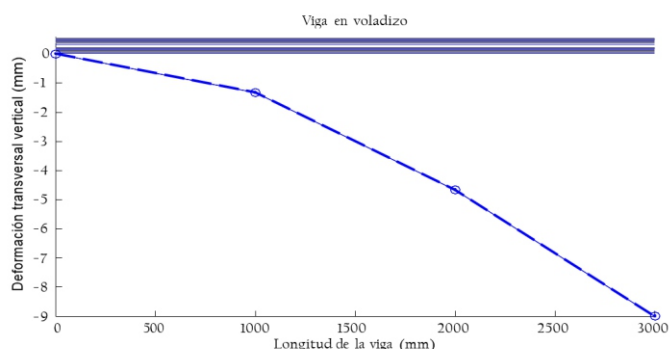


Figura 14. Deformación transversal vertical (mm)  
Fuente: Elaboración propia.

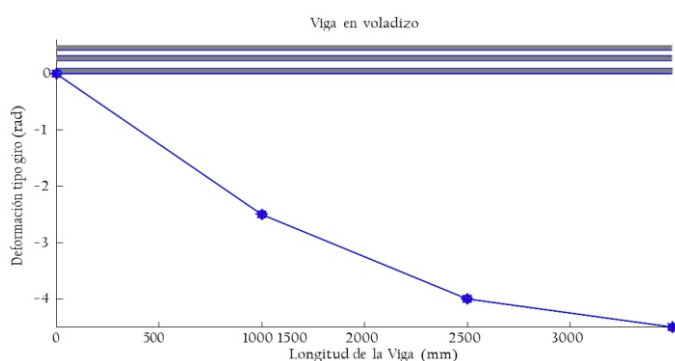


Figura 15. Deformación tipo giro (rad/mm)  
Fuente: Elaboración propia.

### 3.1.6. Cálculo de fuerzas y momentos en el elemento

Para el elemento  $e=1$  tenemos el sistema elemental asociado

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -1.33 \\ -2.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ m_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ m_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

cuya solución es:

$$f_1^{(1)} = 96 \text{ N}, m_1^{(1)} = 298 \text{ N} \times \text{m}, f_2^{(1)} = -96 \text{ N}, m_2^{(1)} = -202 \text{ N} \times \text{m}$$

Para el elemento  $e=2$  se tiene:

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -1.33 \\ -2.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ m_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ m_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

cuya solución es:

$$f_1^{(2)} = 96 \text{ N}, m_1^{(2)} = 198 \text{ N} \times \text{m}, f_2^{(2)} = -96 \text{ N}, m_2^{(2)} = -102 \text{ N} \times \text{m}$$

Para el elemento  $e=3$  se tiene:

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.67 \\ -4.00 \\ -9.00 \\ -4.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(3)} \\ m_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ m_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

cuya solución es:

$$f_1^{(3)} = 96 \text{ N}, m_1^{(3)} = 298 \text{ N} \times \text{m}, f_2^{(3)} = -96 \text{ N}, m_2^{(3)} = -2 \text{ N} \times \text{m}$$

### 3.1.7. Cálculo de fuerzas y momentos en el elemento

Ahora calculamos la fuerza de empotrado en el extremo izquierdo de la viga. Para ello multiplicamos las matrices

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -1.33 \\ -2.50 \\ -4.67 \\ -4.00 \\ -9.00 \\ -4.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ m_1 \\ g_2 \\ m_2 \\ g_3 \\ m_3 \\ g_4 \\ m_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} g_1 &= 99.960 \text{ N}, m_1 = 299.980 \text{ N} \times \text{m}, g_2 = 0.720 \text{ N}, m_2 = -0.004 \text{ N} \times \text{m} \\ g_3 &= -0.024 \text{ N}, m_3 = 0.020 \text{ N} \times \text{m}, g_4 = -100.008 \text{ N}, m_4 = 0.004 \text{ N} \times \text{m} \end{aligned}$$

### 3.2. Problema de la barra empotrada

En la Figura (16) se puede ver una barra empotrada en ambos extremos sometida a fuerzas puntuales en los puntos de unión de las secciones de barra. Se pide hallar los desplazamientos de los puntos de unión de las barras así como también las fuerzas aplicadas en cada sección de la barra y los puntos que se generan.

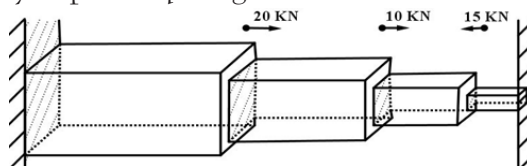


Figura 15. Deformación tipo giro (rad/mm)  
Fuente: Elaboración propia.

Los datos para las vigas: aluminio 8000 mm<sup>2</sup>, 80 GPa, 0.50 m, acero 6000 mm<sup>2</sup>, 60 GPa, 0.40 m, plomo 4000 mm<sup>2</sup>, 440 GPa, 0.20 m y bronce 2000 mm<sup>2</sup>, 70 GPa, 0.10 m, respectivamente.

**3.2.1. Discretización de la barra**

De acuerdo a la naturaleza del problema utilizamos el elemento armadura con dos nodos y un grado de libertad por nodo (en la dirección axial) como puede verse en la Figura (4). De acuerdo a la Figura (4) podemos aplicar la ley de Hooke al nodo 2 y se tiene:

$$f_2^{(e)} = k^{(e)} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) \quad (15)$$

y por la condición de equilibrio estático se tiene que

$$f_1^{(e)} + f_2^{(e)} = 0 \quad (16)$$

Así la fuerza en el nodo 1:

$$f_1^{(e)} = k^{(e)} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) \quad (17)$$

Las ecuaciones (15) y (17) puestas en forma matricial

$$\begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

donde  $(u_1^{(e)}, u_2^{(e)})$  son los desplazamientos nodales,  $(f_1^{(e)}, f_2^{(e)})$  fuerzas locales aplicadas en cada elemento,

$$k^{(e)} = A^{(e)} E^{(e)} / L^{(e)}$$

es la constante de rigidez del elemento,  $A^{(e)}$  área de la sección transversal del elemento,  $E^{(e)}$  módulo de Young del material del elemento. Así la barra queda dividida en cuatro elementos con cinco nodos globales.

**3.2.2. Construcción de las matrices locales de rigidez**

Para el elemento  $e=1$

$$k^{(1)} = \frac{A^{(1)} x E^{(1)}}{L^{(1)}} = \frac{8000mm^2 x 80GPa}{500mm} = 1280 GPa x mm = 1280 KN x mm$$

$$\begin{bmatrix} 1280 & -1280 \\ -1280 & 1280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para el elemento  $e=2$

$$k^{(2)} = \frac{A^{(2)} x E^{(2)}}{L^{(2)}} = \frac{6000mm^2 x 60GPa}{400mm} = 900 GPa x mm = 900 KN x mm$$

$$\begin{bmatrix} 900 & -900 \\ -900 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para el elemento  $e=3$

$$k^{(3)} = \frac{A^{(3)} x E^{(3)}}{L^{(3)}} = \frac{4000mm^2 x 40GPa}{200mm} = 800 GPa x mm = 800 KN x mm$$

$$\begin{bmatrix} 800 & -800 \\ -800 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Para el elemento  $e=4$

$$k^{(4)} = \frac{A^{(4)} x E^{(4)}}{L^{(4)}} = \frac{2000mm^2 x 70GPa}{100mm} = 1400 GPa x mm = 1400 KN x mm$$

$$\begin{bmatrix} 1400 & -1400 \\ -1400 & 1400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

**3.2.3. Ensablaje de las matrices locales**

Utilizando las variables globales  $[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$  y la topología del sistema se tiene el sistema ensamblado

$$\begin{bmatrix} 1280 & -1280 & 0 & 0 & 0 \\ -1280 & 1280 & -900 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 1700 & -800 & 0 \\ 0 & 0 & -800 & 2200 & -1400 \\ 0 & 0 & 0 & -1400 & 1400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

**3.2.4. Introducción de las condiciones de contorno**

La viga se encuentra empotrada en ambos extremos como consecuencia se tiene los valores  $u_1=0$  y  $u_5=0$  y se aplica las fuerzas de  $f_2 = 20, f_3 = 10$  y  $f_4 = -15$  KN. Así tenemos el sistema de ecuaciones con las condiciones dadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1280 & -900 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 1700 & -800 & 0 \\ 0 & 0 & -800 & 2200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20+1280 x u_1 \\ 10 \\ -15+1400 x u_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

cuya solución es:

$$u_1=0.00000, u_2=0.01427, u_3=0.01234, u_4=-0.00233, u_5=0.00000 mm$$

**3.2.5. Cálculo de fuerzas en los nodos de los elementos**

Para el elemento  $e=1$

$$\begin{bmatrix} 1280 & -1280 \\ -1280 & 1280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.01427 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(1)} = -18.26560, f_2^{(1)} = 18.26560$$

Para el elemento  $e=2$

$$\begin{bmatrix} 900 & -900 \\ -900 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01427 \\ 0.01234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(2)} = 1.73700, f_2^{(2)} = -1.73700$$

Para el elemento  $e=3$

$$\begin{bmatrix} 800 & -800 \\ -800 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01234 \\ 0.00233 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(3)} = 11.73600, f_2^{(3)} = -11.73600$$

Para el elemento  $e=4$

$$\begin{bmatrix} 1400 & -1400 \\ -1400 & 1400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00233 \\ -0.00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(4)} = -3.26200, f_2^{(4)} = 3.26200$$



### 3.2.6. Cálculo de esfuerzos por elemento

Para el elemento  $e=1$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= 80 \begin{bmatrix} -\frac{1}{500} & \frac{1}{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.01427 \end{bmatrix} \\ &= 2.2832 \times 10^{-3} Pa \\ &= 2.2832 MPa \end{aligned}$$

Para el elemento  $e=2$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= 60 \begin{bmatrix} -\frac{1}{400} & \frac{1}{400} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01427 \\ 0.01234 \end{bmatrix} \\ &= 0.2895 \times 10^{-3} Pa \\ &= -0.2895 MPa \end{aligned}$$

Para el elemento  $e=3$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= 40 \begin{bmatrix} -\frac{1}{200} & \frac{1}{200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01234 \\ -0.00233 \end{bmatrix} \\ &= -2.934 \times 10^{-3} Pa \\ &= -2.934 MPa \end{aligned}$$

Para el elemento  $e=4$

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \\ &= 70 \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00233 \\ 0.00000 \end{bmatrix} \\ &= 1.631 \times 10^{-3} Pa \\ &= 1.631 MPa \end{aligned}$$

### 3.3. Problema de la barra elástica doblemente empotrada

Presentamos el problema de un sistema de barras elásticas paralelas doblemente empotrada sometida a una fuerza axial en su punto de unión como se muestra en la Figura (17).

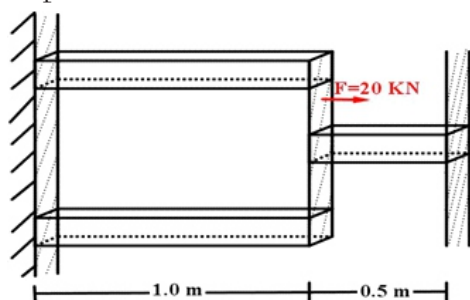


Figura 17. Sistema de barra elástica paralelas doblemente empotrada.

Fuente: Elaboración propia.

Para las vigas en paralelo se tiene: aluminio 5000 mm<sup>2</sup>, 70 GPa, 1.0 m y plomo 800 mm<sup>2</sup>, 150 GPa, 0.50 m, respectivamente.

### 3.3.1. Discretización de la barra

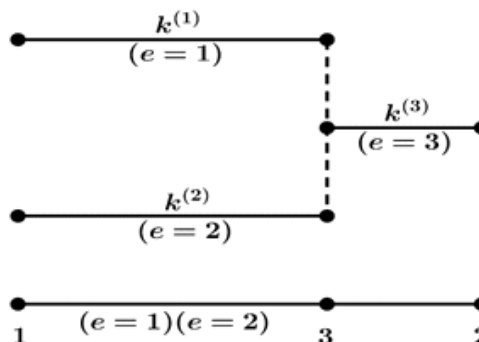


Figura 18. Discretización sistema de barra elástica paralelas doblemente empotrada.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura (18) se muestra la discretización de la barra y la disposición de los elementos con sus nodos. Podemos observar la conexión de los nodos local y nodos globales dados en la matriz de compatibilidad.

Tabla 02. Matriz de conectividad

nodo global	e = 1	e = 2	e = 3
1	1	1	0
2	0	0	2
3	2	2	1

Fuente: Elaboración propia.

### 3.3.2. Construcción de las matrices locales de rigidez

Para los elementos  $e=1$  y  $e=2$

$$\begin{aligned} k^{(e)} &= \frac{A^{(e)} x E^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{5000mm^2 x 70GPa}{1000mm} = 350 GPa x mm \text{ o } 350 KN/mm \\ \begin{bmatrix} 350 & -350 \\ -350 & 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Para los elementos  $e=3$

$$\begin{aligned} k^{(e)} &= \frac{A^{(e)} x E^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{8000mm^2 x 150GPa}{500mm} = 240 GPa x mm \text{ o } 240 KN/mm \\ \begin{bmatrix} 240 & -240 \\ -240 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.3.3. Ensamblaje de las matrices locales

Utilizando las variables globales  $[u_1, u_2, u_3]$  y la matriz de compatibilidad del sistema se tiene

$$\begin{bmatrix} 700 & 0 & 700 \\ 0 & 240 & -240 \\ 700 & -240 & 940 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

### 3.3.4. Imposición de las condiciones de contorno

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene que  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 20$  y  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ . Entonces el sistema de ecuaciones (26) queda en la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 940 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 + 70x u_1 + 240x u_2 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$u_3 = \frac{20}{940} \approx 0.02127659$$

### 3.3.5. Cálculo de fuerzas en los nodos de los elementos

Para los elementos  $e=1$  y  $e=2$

$$\begin{bmatrix} 350 & -350 \\ -350 & 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(e)} = 0.00000, \quad f_2^{(e)} = 0.00000$$

Para el elemento  $e=3$

$$\begin{bmatrix} 240 & -240 \\ -240 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.02127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$f_1^{(e)} = 0.00000, \quad f_2^{(e)} = 0.00000$$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] O. Axelsson and V.A Barker. Finite element solution of boundary value problems, Theory and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Edit. SIAM, 2001.
- [2] P.I. Kattan. Matlab guide to Finite Elements. An Interactive Approach. Springer Verlag Heidelberg, 2008.
- [3] S.C. Brenner and L.R. Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Third Edition, Springer, 2008
- [4] D.L. Logan. A First Course in the Finite Element Method. Fifth Edition. CENGAGE, learning, 2012.
- [5] F. Hartmann and C. Katz. Structural Analysis with Finite Elements, Springer-Verlag, 2007.