UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

FACULTAD DE INGENIERÍA
Tecnología & Desarrollo
Vol. 14, Nº 1, Enero - Diciembre 2016, Pág.117-126

Descomposición lagrangiana para resolver el problema de localización de la p-mediana generalizado

Lagrangian decomposition to solve the problem of locating the p-median generalized

Giancarlo Montes[1] | Jenny Rojas[2]

RESUMEN

En el presente artículo se utiliza el método de descomposición lagrangiana para resolver el problema de localización de la p-mediana generalizado. Se describe e interpreta geométricamente la relajación lagrangiana y la descomposición lagrangiana. Se desarrolla un algoritmo heurístico basado en la descomposición lagrangiana para hallar la solución del problema en estudio y se analiza los resultados computacionales del método de descomposición lagrangiana y relajación lagrangiana más optimización subgradiente para resolver el problema de localización de la p-mediana generalizado, mostrando la superioridad en tiempo de ejecución de la descomposición lagrangiana versus la relajación lagrangiana.

Palabras clave: Relajación lagrangiana, Descomposición lagrangiana, Problema de localización.

ABSTRACT

In this paper we analyze the lagrangian decomposition method for solving the generalized p-median location problem. We describe and we do the geometric interpretation froni the lagrangian relaxation and lagrangian decomposition. We use an heuristic lagrangian decomposition algorithm for solving the generalized p-median location problem. We al-so analyzed the computational results using the decomposition lagrangian method and lagrangian relax whit subgradient optimization and we find that the decomposition lagrangian is better than lagrangian relax for the study problem.

.

Keywords: Lagrangian relax, Lagrangian decomposition, Location problem

INVESTIGACIÓN

Recepción: 12-08-2016 / **Aceptación:** 06-09-2016

[1] Universidad Nacional de Trujillo - Programa Académico de Ciencias. . E-mail: gian2003_2@hotmail.com
[2] Universidad Nacional de Trujillo - Programa Académico de Ciencias. . E-mail: jmrojas00@yahoo.es

1. INTRODUCCIÓN

Todo problema de optimización cuya función objetivo y restricciones son lineales, puede ser resuelto usando métodos de Programación Lineal. Si alguna de las variables es entera, estamos ante un problema de programación lineal mixto y si todas las variables son enteras, es un problema de Programación Lineal Entero. El método más utilizado para resolver un problema Lineal Entero es la relajación lagrangiana.
La relajación lagrangiana consiste en pasar un grupo de restricciones (difíciles) a la función objetivo haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange. De esta forma se consigue descomponer el problema original en subproblemas más pequeños y fáciles de resolver, para finalmente establecer relaciones que permitan obtener la solución del problema original.

Puede ocurrir que al relacionar las soluciones de los subproblemas resueltos de forma independiente, se obtenga una solución global no factible, debido a que los subproblemas se obtienen de relajar ciertas restricciones. Para determinar los multiplicadores de Lagrange que proporcionan la mejor solución se usa el problema dual, cuyo valor óptimo es una cota inferior del valor óptimo del problema original para una solución factible de este[1].

Cuando un problema de programación lineal entera presenta un conjunto de restricciones que es la intersección de restricciones con estructuras especiales, es posible definir una relajación lagrangiana llamada Descomposición lagrangiana que consiste en descomponer el problema en varios sub problemas diferentes, cada uno de ellos en una de las estructuras especiales. Para esto es necesaria la creación de una (o más) copias idénticas de las variables de decisión, las cuales en cada subconjunto de restricciones cumplen con la condición de ser idénticas. El método de Descomposición Lagrangiana, mantiene en cada subproblema todas las restricciones originales y la resolución de ellos genera una mejor cota del valor de la función objetivo que la que produce la relajación lagrangiana. Además permite el uso implícito de polítopos enteros sin necesidad de su descripción explícita[2].
La idea de crear "copias" de algún subconjunto de las variables originales fue usada por Glover y Klingman en el contexto de estrategias de capas para redes[3] y por Jórnsten y Násberg para el problema de asignación generalizado[4]. Sin embargo, esta nueva forma de aplicación de la relajación lagrangiana no se ha aprovechado al máximo por falta de un mayor análisis de la relación de un problema primal y su dual.
Así mismo, durante años, investigadores como Fermat, Torricelli, Silvester o Steiner propusieron ingeniosos métodos algebraicos o mecánicos para resolver problemas de localización como son[5]:

1) Obtener el punto del plano de modo que la suma de las distancias a tres puntos fijos sea mínima.
2) Obtener el centro del círculo de radio mínimo que encierre a un conjunto de puntos dados.
3) Obtener los centros de N círculos contenidos en un cuadrado, que no tengan más solapamiento entre ellos que sus bordes y que el radio de los círculos sea máximo.
4) Obtener la forma de interconectar N puntos, de modo que se minimice la suma de las longitudes de los segmentos de conexión.

En el siglo XX problemas como los mencionados sobrepasaron los límites de las matemáticas y han sido estudiados por investigadores de diferentes disciplinas. Por ejemplo el primer problema, generalizado a N puntos, es el famoso problema de Fermat-Weber, que busca la localización de un centro de distribución para minimizar el costo total de transporte a los centros de demanda o destino; el segundo problema, busca la localización de un centro de emergencia, de modo que el usuario más alejado esté lo más cerca posible al centro de emergencia; el tercero, busca la ubicación de N establecimientos de producción y para evitar la excesiva competencia entre ellos, debe existir la máxima separación posible de los mismos. Este problema también es usado en telecomunicaciones, para ubicar transreceptores y se desea minimizar las interferencias maximizando la separación entre ellos. El cuarto problema (problema del árbol de Steiner), ha sido usado en disciplinas como las telecomunicaciones (diseño de conexiones de redes de ordenadores) o Bioinformática (árboles filogenéticos). Los ejemplos anteriores, son ilustraciones de problemas de localización cuyo estudio forma parte ahora del área de la programación matemática (programación lineal entera) que juega un papel fundamental en el modelado y resolución de problemas de localización[5].

El avance y la disponibilidad de recursos informáticos, ha generado que se planteen y solucionen nuevos problemas de localización, escritos como problemas de programación lineal entera como : problema de localización de plantas no capacitado presentado por Cornuéjols[6], resolución por el método de inecuaciones válidas y facetas del problema de localización de plantas no capacitado presentado por Cho[7]; resolución por el método de proyección del problema de localización de plantas no capacitado presentado por Conn[8]. En lo que se refiere a procedimientos de resolución heurísticos, se han utilizado principalmente heurísticas de tipo "greedy" y "localización y asignación" e "intercambio" y posteriormente se utilizaron heurísticas basadas en la relajación lagrangiana; por ejemplo, Beasly[9] utilizó

heurísticas lagrangianas para resolver problemas de localización[9].
En lo que se refiere al uso del método de descomposición lagrangiana Guignard muestra su aplicación para el problema del árbol ponderado con restricción de recursos mínimos asímismo muestra su aplicación a problemas de programación entera de estocásticos[9].

2. PROBLEMA

Nuestro objetivo, en este artículo es la aplicación de la Descomposición Lagrangiana para resolver el Problema de Localización de la p-Mediana Generalizado[1,10] definido matemáticamente como sigue:
Sea $J = \{1, 2,..., m\}$ un conjunto de candidatos a puntos de servicio, p el número de puntos de servicio a localizar, $I=\{1, 2,..., n\}$ un conjunto de usuarios, f_j el costo de localización de un punto de servicio en la posición j y c_{ij} el costo de satisfacer la demanda del usuario i desde el punto j, se desea localizar p puntos de servicio entre el conjunto de m posibles candidatos, para atender la demanda del conjunto de n usuarios de forma que se alcance el objetivo de minimizar el costo total, entonces suponiendo que los puntos de servicio no tienen limitaciones de capacidad para atender a la demanda (por lo que cada usuario se sirve desde un único punto de servicio, de aquél para el cual el costo de satisfacer su demanda sea menor), definiendo las variables y_j como los valores 1 ó 0 según j sea o no seleccionado para localizar en él un punto de servicio y las variables x_{ij} como los valores 1 ó 0 según sea o no i servido desde j; el problema de localización se puede formular de la siguiente forma[11]:

$$\text{minimizar} \sum_{j-1}^{m} f_i\, y_i + \sum_{i-1}^{n} \sum_{j-1}^{m} C_{ij}\, X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.a} \sum_{K=0}^{n} x_{ij} = 1 \ , \quad i = 1 \dots \dots .. n \qquad (2)$$

$$(\mathrm{P}) \sum_{j=1}^{m} y_j = p \qquad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad , \quad i = 1, \dots , n \ , \ j=1, \dots , m$$

$$x_{ij}, y_i \in \{ 0,1\} \ , \quad i = 1, \dots , n$$

2.1. Relajación lagrangiana

La relajación lagrangiana según Held y Karp para un problema de minimización lineal y entero es de la forma[12]:

$$(\mathrm{P}) \quad \min \{ fx\!: \ Ax \leq b; Cx \leq d; \ \ x \in X\} \qquad (4)$$

Donde:

f,b,d,AyC son vectores y matrices de dimensiones conformables con el vector x, $X \subset Zn$.

Supongamos que las restricciones, $Cx \leq d$, son "buenas" en el sentido de que el problema lineal entero con solo estas restricciones es fácil de resolver. Si se omiten las restricciones $Ax \leq b$, llamadas restricciones complicantes, la relajación resultante es más fácil de resolver que el problema original (P). Muchos problemas tienen esta estructura, por ejemplo, en el problema del agente viajero: si uno omite las restricciones de conectividad; en el problema de localización no capacitado: si uno omite las restricciones de la demanda del cliente; y así sucesivamente para otros problemas. Sin embargo, la cota resultante obtenida de la relajación puede ser no muy buena (menor cota inferior), debido a que algunas restricciones importantes son ignoradas totalmente. Una manera de hacer frente a este problema es mediante la relajación de Lagrange, presentada a continuación[12,13].
Una posible relajación del problema (P) es quitar las restricciones $Ax \leq b$ (restricciones complicantes) y añadirlas a la función objetivo multiplicadas por un vector "u" de dimensión conformable con (Ax — b), llamado multiplicador de Lagrange definiendo el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} & \min & fx + u(Ax - b) \quad (5) \\ (\mathrm{R\,L}) & \mathrm{s.a} & Cx \leq d, \quad u \geq 0, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{X} \end{array}$$

Denominado relajación lagrangiana.

Teorema 2.1:El problema (RL) es una relajación de (P) para todo $u \geq 0$.

Teorema 2.2: Si (RL) es una relajación de (P), entonces $z(RL) \leq z(P), \forall\, u \geq 0$.

Para encontrar la mejor (mayor) cota inferior con la infinidad de posibles valores de u, tenemos que resolver el siguiente problema.

Definición 2.1.1
El problema:

$$(R) \quad \max \ \{z(RL)\!: \ u \geq 0\} \qquad (6)$$

Es llamado el problema dual de la relajación lagrangiana de (P) relativo a las restricciones complicantes $Ax \leq b$.
(R) es un problema en los multiplicadores de Lagrange u, mientras que (RL) es un problema en las variables x.

Observación: Supongamos que las restricciones complicantes son restricciones de igualdad en (P), es decir, el problema (P) es de la forma[13]:

$$(\mathrm{Q}) \ \min \{ fx\!: \ Ax = b; Cx \leq d; \ \ x \in X\} \ \ (7)$$

Podemos relajar el problema (Q) notando que las restricciones Ax = b se pueden reemplazar por las inecuaciones $Ax \leq b$ y $-Ax \leq -b$. Entonces tomando $u \geq 0$ y $v \geq 0$ multiplicadores de Lagrange apropiados, tenemos el siguiente problema relajado[1]:

$$\begin{array}{l} min\{\ fx + u(Ax - b) + v(-Ax + b)\} \quad \textbf{(8)} \\ \quad s.a \quad Cx \leq d; \quad x \in X \end{array}$$

Que es el equivalente a:

$$\begin{array}{c} \min\ fx + \ \lambda(Ax - b) \quad \textbf{(9)} \\ s.a \ \ Cx \ \leq d; \quad x \in X \end{array}$$

Donde:

$\lambda = u - v$ y no tiene restricciones de signo, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.2. Interpretación geométrica de la relajación lagrangiana

El siguiente teorema, de Geoffrion[11], nos da una mayor visión sobre la relajación lagrangiana. Se dará una interpretación geométrica del problema dual de la relajación lagrangiana en el espacio primal (el espacio dual está dado por los multiplicadores de Lagrange u), y esto nos permite hacer un estudio de la relajación lagrangiana mediante esquemas de inclusión.

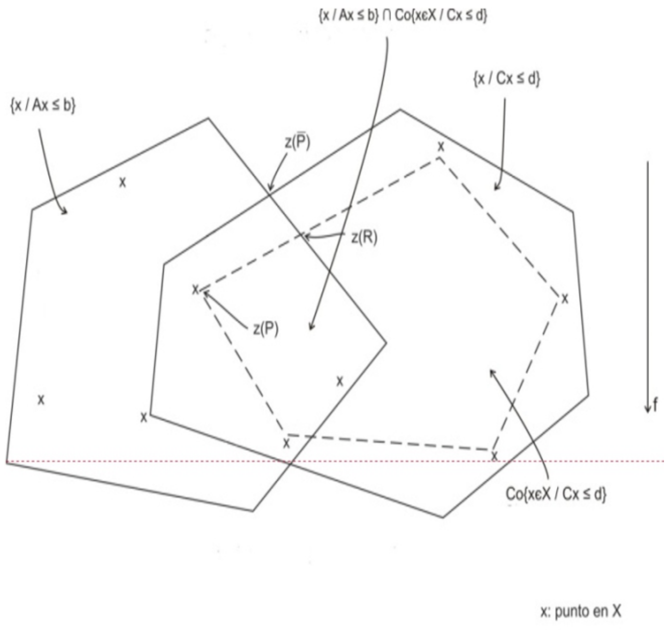

Figura 1. Interpretación geométrica del dual de la relajación lagrangiana.
Fuente: Geoffrion[11]

Teorema 2.3. El problema dual de la relajación lagrangiana (R) es equivalente al problema de programación lineal definido por:

$$(S) \quad \min\{fx/x \in \{x/Ax \leq b\} \cap Co\{x/Cx \leq d, x \in X\}\} \quad \textbf{(10)}$$

en el sentido de que $z(R) = z(S)$.

2.3. Descomposición lagrangiana

Una descomposición lagrangiana es la relajación lagrangiana de las restricciones $y = x$ llamadas "copias" del siguiente problema:

$$\begin{array}{llll} & \min & fx & \textbf{(11)} \\ & s.a & Ay \leq b & \\ (\text{P}') & & Cx \ \leq d & \\ & y = x; & x \in X; & y \in Y \end{array}$$

el cual es equivalente al problema (P) para cualquier $Y \supset X$. Es decir:

$$\begin{array}{llll} & \min & fx + u(y - x) \ \ \textbf{(12)} & \\ (\text{DL}) & s.a & Cx \leq d & x \in X \\ & & Ay \leq b; & y \in Y \end{array}$$

Esto produce un problema de descomposición lagrangiana; se descompone en los sub-problemas siguientes:

x-problema

$$\begin{array}{lll} & \min & (f - u)x \quad \textbf{(13)} \\ (\text{DLux}) & \text{s.a.:} & Cx \leq d; \quad x \in X \end{array}$$

Donde los multiplicadores de Lagrange $u \in R$. Además se cumple que:

$$\text{z(DL)} = \text{z(DLux)} + \text{z(DLuy)} \quad \textbf{(14)}$$

$$\begin{array}{ll} & \min \quad uy \\ (\text{DLuy}) & \text{s.a.: } Ay \leq \ c; \quad y \in X \end{array}$$

Donde los multiplicadores de Lagrange $u \in R$.

Además se cumple que $z(DL) = z(DLux) + z(DLuy)$.

Definición 2.3.1 El problema

$$\begin{array}{lll} (D) & \max\ z(DL) & \textbf{(14)} \\ & s.a.\ \ u \in R & \end{array}$$

es llamado el problema dual de la descomposición lagrangiana de (P).

Sea vo un multiplicador de Lagrange óptimo, entonces demostramos que $z(DL(u^o))$ con u^o definido como v^oA es mejor (mayor) que la cota $z(RL(v^o))$.

Teorema 2.4: Consideremos $v^o \in SO(R)$, y sea $(x^o, y^o) \in SO(DL(u^o))$ entonces:

(i) $z(DL(u°)) - z(RL(v°)) - v°(b - Ay°)$
(ii) $z(R) \leq z(D)$

Este resultado fue probado de forma independiente por Glover[3] y Jornsten[14].

Definición 2.3.2. Decimos que existe un "hueco de dualidad" si el valor óptimo del problema primal tiene desigualdad estricta (es mayor que) con el valor óptimo del problema dual.

Una condición suficiente de optimalidad para la solución lagrangiana es:
Lema 2.1. Sea (x(û),y(û)) una solución óptima de (DL(û)). Si x(û) y y(û) son iguales, entonces x(û) es una solución óptima de (P), u es una solución óptima de (D) y no hay hueco de dualidad.

Consideremos el problema de programación lineal:

$$(Q)\ \min\{fx/x \in Co\{Ax \le b.x \in Y\} \cap Co\{x/Cx \le d, x \in X\}\} \qquad (15)$$

El valor óptimo del problema dual de la descomposición lagrangiana (D) es igual al valor óptimo del problema de programación lineal (Q).

Teorema 2.5: El valor óptimo del problema dual de la descomposición lagrangiana (D) es igual al valor óptimo del problema de programación lineal (Q).

2.3.3 Interpretación geométrica de la descomposición lagrangiana

Optimizando así el problema dual de la descomposición lagrangiana es equivalente a la optimización del problema primal en la intersección de las envolventes convexas de los conjuntos de restricciones. Esto proporciona un medio para comparar las fortalezas de la relajación y descomposición lagrangiana mediante esquemas de relaciones de inclusión entre las respectivas envolventes convexas en el espacio de las variables originales x a pesar de que el dual se complique por las variables copias y. Esto se ilustra en la Figura 2.

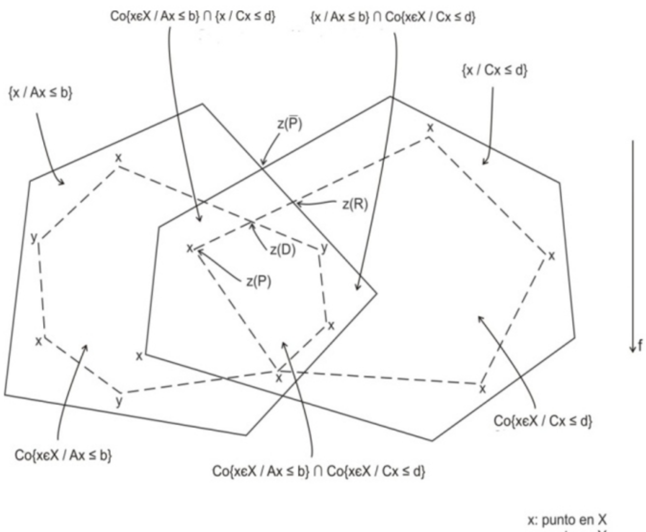

Figura 2: Interpretación geométrica del dual de la descomposición lagrangiana.
Fuente: Geoffrion[11].

Finalmente, introducimos en una forma negativa una condición necesaria para la mejor cota.

Teorema 2.6: Si el x—problema o el y—problema tienen la propiedad de integralidad (P.I.), z(D) es igual a la mejor de las dos cotas dadas por la relajación lagrangiana, correspondiente a la relajación de los conjuntos de restricciones {x/Ax ≤ b} o {x/Cx ≤ d}.

3. APLICACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN LAGRANGIANA

Para aplicar el método de descomposición lagrangiana al problema (P), creamos nuevas variables w_{ij} e introducimos el conjunto de restricciones $w_{ij}=x_{ij}$ con lo cual el problema (P) es equivalente a[11]:

$$minimizar\ \sum_{j\ 1}^{m} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \quad (16)$$

$$s.a\ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} = 1 \ , \qquad i = 1,\dots,n$$

$$(P') \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j = p \qquad (17)$$

$$x_{ij} \le y_j \ , \ i = 1,\dots,n \ , j = 1,\dots,m$$

$$w_{ij} = x_{ij} \ , \ i = 1,\dots,n \ , j = 1,\dots,m \quad (a)$$

$$x_{ij}, w_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \ i = 1,\dots,n \ , j = 1,\dots,m$$

De esta forma, pasando las restricciones (a) a la función objetivo y utilizando multiplicadores $u_{ij} \in \mathbb{R}$, obtenemos el siguiente problema relajado lagrangiano de (P´)[11]:

$$minimizar\ \sum_{j=1}^{m} f_j y_j + \sum_{i=\ 1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(w_{ij} - x_{ij}) \quad (18)$$

$$s.a \qquad \sum_{j=1}^{m} w_{ij} = 1 \ , \qquad i = 1,\dots,n$$

$$(DL) \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j = p \qquad (19)$$

$$x_{ij} \le y_j \ , \ i = 1,\dots,n \ , \qquad j = 1,\dots,m$$

$$x_{ij}, w_{ij}, y_j \in \{0,1\} \ , \ i = 1,\dots,n \ , \ j = 1,\dots,m$$

Para cada conjunto de multiplicaciones ui, este problema se descompone en dos sub-problemas:

$$minimizar \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} - u_{ij})x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} f_i y_i \quad (20)$$

$$(DLux)\ s.a \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = p \qquad (21)$$

$$x_{ij} \le y_j \ , \ i = 1,\dots,n \ , \qquad j = 1,\dots,m$$

$$x_{ij}, w_{ij}, y_j \in \{0,1\} \ , \ i = 1,\dots,n \ , \ j = 1,\dots,m$$

$$minimizar \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\, w_{ij} \quad (22)$$

$$(DLuw)\ s.a \quad \sum_{j=1}^{m} w_{ij} = 1 \ , \quad i = 1,\dots,n \quad (23)$$

$$w_{ij} \in \{0,1\} \ , \ i = 1,\dots,n \ , \ j = 1,\dots,m.$$

y se cumple que z(DL) = z(DLux) + z(DLuw).

Resolviendo por inspección estos subproblemas, se tiene:

Caso (DLux):
Se divide en un subproblema para cada subproblema para cada j=1,...,m de la forma:

$$minimizar \sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - u_{ij})x_{ij} + f_j y_j \quad (24)$$
$$(DLux) \quad s.a \quad x_{ij} \le y_j \ , \ i = 1,\dots,n \ ,j = 1,\dots,m$$
$$x_{ij}, w_{ij}, y_j \in \{0,1\} \ , \ i = 1,\dots,n \ , \ j = 1,\dots,m$$

Si y'_j=0; x'_{ij}=0 para todo i, y el valor objetivo es 0.

Si y'_j=1 , entonces x'_{ij}=1 si $c_{ij} - u_{ij}$<0, x_{ij}=0 si $c_{ij} - u_{ij}$>0 e indiferente si $c_{ij} - u_{ij}$=0. El valor objetivo es entonces:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \min(0, c_{ij} - u_{ij}) + f_j \quad (25)$$

Por lo tanto; $z_j(DLux_j)$=min(0,a_j) y el valor óptimo del problema (DLux) sin la restricción (9) es:

$$Z(DLux) = \sum_{j=1}^{m} z_j(DLux_j) \quad (26)$$

Supongamos que J_{min} = { $l_1, l_2, \dots, l_p$} es el conjunto de índices de los p menores a_k con $al_1 \le al_2 \le \dots \le al_p$, donde los empates son resueltos arbitrariamente; donde y'_j tomara el valor de 1 en el óptimo si a_j es uno de los p menores a_k; entonces el valor optimo del problema (DLux) toma la forma:

$$z(DLux) = \sum_{k=1}^{p} a_{l_k} \quad (27)$$

Caso (Dluw):
Sea $u_{ij}(i)=\min_{1\le k\le n}\{u_{ik}\}$ {uik}, i = 1,... , n; la solución óptima es w'_{ij}=1, si j = j (i) y 0.

En otro caso, para i = 1,..., n. Entonces el valor óptimo del problema (DLuw) toma la forma:

$$z(DLuw) = \sum_{i=1}^{n} \min_{1\le k\le n}\{u_{ik}\} = \sum_{i=1}^{n} u_{ij(i)} \quad (28)$$

El valor óptimo del problema (DL) toma la forma:

$$z(DL) = \sum_{k-1}^{p} a_{l_k} + \sum_{i-1}^{n} u_{ij(i)} \quad (29)$$

Si todo i, para todo j, x'_{ij}= w'_{ij}, entonces (y'_j,x'_{ij}) es solución óptima de (P) por lema (2.1). En otro caso, si para algún par (i,j), $x'_{ij} \neq w'_{ij}$, hallamos una solución factible de (P) asignando y_j= y'_j si j ∈ J_{min}, $x_{ij(i)}$=1, x_{ij}=0 sij ≠ j(i), siendo $c_{ij(i)}$=$\min_k$ {c_{ij}/ y_k=1}. Por lo tanto:

$$z_{LB} = z(DL) = \sum_{k=1}^{p} a_{l_k} + \sum_{i=1}^{n} u_{ij(i)} \le z(P) \le \sum_{i=1}^{n} c_{ij(i)} + \sum_j f_j = z_{UB} \quad (30)$$

Por lo que si z_{LB}=z_{UB} la solución hallada sería óptima.

Para mejorar la cota inferior y considerando que no se conoce el valor óptimo de z(DL) en la componente de z(DLux), y no es posible fijarlo en cero impediría mejoras globales. El incremento de los valores de u_{ij} que coincidan con $u_{ij(i)}$ proporcionarán una mejora de z(DL) si los a_j correspondientes no se encuentran entre los p menores a_j Si solamente uno de los índices j se encuentra en J_{min}, el decremento de z(DLux) se verá compensado con un incremento igual de z(DLuw), por lo que z_{LB} no cambiará; sin embargo, el descenso en el valor de este a_j de entre los p menores, puede ser beneficioso para posteriores iteraciones del método, por lo que no descartamos la selección de estos casos. La heurística que se expone a continuación cumple con esta condición[11].

3.1. Algoritmo heurístico de la descomposición

Paso 1. Inicialización de los multiplicadores y cálculo de z_{LB} inicial.

- Para toda i, para toda j, hacer u_{ij}= c_{ij}.
- Para todo i, calcular $u_{ij(i)}$= $\min_{1\le k\le m}$ {uik} y hacer m(i) = 0.
- Para toda j, hacer a_j= f_j y calcular z_{LB}=$\sum_{k=1}^{p} a_{l_k}$+$\sum_{i=1}^{n}$ $u_{ij(i)}$.

Paso 2. Condición de parada para generación de multiplicadores.

- Para todo i, encontrar si existe un j tal que se cumpla u_{ij}= $u_{ij(i)}$ y a_j= al_1 o encontrar si existe más de un j tal que se cumpla u_{ij}= $u_{ij(i)}$ y $a_j \le a_{lp}$ entonces hacer m(i) = 1.
- Si para todo i, m(i) = 1; ir al paso 4.

Paso 3. Incremento de la cota inferior.

- Para todo i, con la condición de que m(i) = 0 calcular:

$$S(i) = card\{j/u_{ij} = u_{ij(i)}\}$$

$$S(i) = \min_i\{S(i)/m(i) = 0\}$$

- Calcular v=min{$u_{ij(i)}$/m(i)= 0 y S(i)=S} y hallar i´ tal que m(i´) = 0, S(i´) = S y $u_{i'j(i')}$=v
- Hallar j´ tal que $a_{j'}$= $\min_j$ {a_j/$u_{i'j}$=v} .
- Calcular Δ_1= $\min_j$ {$u_{i'j}$ / $u_{i'j} \neq$ v}-v y Δ_2= $\min_k$ {a_k/k ≠ j´, /$u_{i'k}$=v}-a_{lp} poniendo Δ_2=+∞ si {a_k / k ≠ j´, /$u_{i'k}$=v}=∅; y sea Δ=min(Δ_1, Δ_2).
- Para todo j, tal que $u_{i'j}$= v hacer $u_{i'j}$)= $u_{i'j}$+Δ y a_j=a_j-Δ; ir al paso 2.

Paso 4. Generación de una solución factible.

- Hacer: $y_j^* = \begin{cases} 1 & si\ j \in J_{min} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$
- Hacer: $c_{ij(i)} = \min_k\{c_{ik} / y_k^* = 1\}$.
- Para todo i, calcular j(i) tal que

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1 & si\ y_j^* = 1\ y\ j = j(i) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

• Calcular

$$z_{UB} = \sum_j f_j\, y_j^* + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}^* \qquad (31)$$

Paso 5. Condición de optimalidad.

Si: $z_{LB} = z_{UB}$; ir al paso 7.

Paso 6. Procedimiento de intercambio.

6.1 Para todo j, tal que y^*_j=1 y para todo k, tal que y^*_k=0: hacer y^*_j=0, y^*_k=1, calcular x^*_{ij} según (10), recalcular el valor z de (1); si z<z_{UB} hacer z_{UB}=z; en otro caso, hacer y^*_j=1, y^*_k=0.

6.2 Si ha habido mejora de Z_{UB}, volver a 6.1.

Paso 7. Final del procedimiento.

Calcular x^*_{ij} a partir de los valores de y^*_j en curso. La solución heurística de (P) viene dada por (y^*_j , x^*_{ij}) y su valor objetivo por z_{UB}.

Hemos indicado por m(i) = 1 los índices i que no mejora en caso de incrementar U_{IJ} y por S(i) el número de multiplicadores asociados al í-ésimo punto de demanda que toman el valor mínimo. Para mejorar z_{LB} será necesario incrementar todos los u_{ij} tales que $u_{ij}= u_{ij(i)}$ en una cantidad Δ; esto conlleva que el correspondiente a_j disminuya en Δ. Para garantizar en cada momento que a_j ≥ 0, el máximo aumento que mantiene z(DLux) = 0 viene dado por Δ = mín(Δ1, Δ2). Cuanto mayor sea S(i), menos posibilidades hay de mejorar z_{LB}, por lo que se selecciona un índice i' con el menor de estos cardinales.

La acción de incrementar los $u_{i'j}$ tales que $u_{i'j}$=v en la cantidad Δ hace siempre crecer z(DLuw) en Δ y no decrece z(DLux) en más de Δ, luego para cada variación de los multiplicadores z_{LB} aumenta o queda sin alterar. El algoritmo se detiene al cabo de un número finito de iteraciones puesto que los valores u_{ij} siempre crecen, tendiendo a igualarse para cada i, en cuyo caso se daría la condición de parada.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para aplicar del algoritmo heurístico, se utilizó un ordenador personal cuyos tiempos de cálculo y características gene¬rales están de acuerdo con los equipos que se dispone actualmente; un software accesible para la programación del algoritmo; llevar a cabo el estudio con datos ingresados dentro de rangos lógicos (los costos de instalación f_j fueron valores enteros fijados al azar entre 200 y 300; los costos de servicio c_{ij} también enteros al azar entre 20 y 40); comparar el método descomposición con otro basado en la relajación lagrangiana más optimización subgradiente de Beasley[10] y para ello se analizó el algoritmo heurístico de la relajación lagrangiana y los resultados obtenidos por Marín y Pelegrín[11].

Se fijó el número de puntos de servicio, puntos de demanda y el valor de p a distintos niveles, y se solucionó un total de 300 problemas para cada combinación de tamaños, anotándose el tiempo medio requerido para la resolución (excluido la lectura de los datos y la salida de los resultados) y el agujero dual medio (entendido como (z_{UB}-z_{LB})/z_{UB}. También se tuvo en cuenta para agilizar el algoritmo manejar una matriz consistente en los valores de u_(ij)ordenados por filas, de manera que el acceso al mínimo de cada fila y al menor elemento distinto del mínimo sea mucho más rápido en disminución del tamaño máximo del problema[11].

En tabla 1 se presenta los resultados computacionales para el problema de la p-mediana generalizado. Se puede observar que de los 300 problemas tratados el 90.67% de los problemas el valor de z_{UB} era exactamente el mismo; en el 2.33% de los casos era ligeramente mejor la solución proporcionada por el método de descomposición, y en el 7% el método de relajación mejoraba ligeramente la solución del método de descomposición. Podemos hablar entonces de pequeñas diferencias en los resultados, en particular cuando el tamaño de p es pequeño en comparación con el número de posibles puntos de servicio. Además; el agujero dual de la descomposición es siempre mayor o igual que en el caso de la relajación. Finalmente; se observa una notable mayor rapidez en el método de descomposición.

5. CONCLUSIONES

Dado el problema de localización de la p-Mediana generalizado formulado de la siguiente forma:

$$minmizar \sum_{j=1}^{m} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (32)$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 , \qquad i = 1 \ldots\ldots..n$$

$$(P) \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j = p$$

$$x_{ij} \le y_j , \; i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$$

Tabla 1: Resultados computacionales del problema (P)

Puntos de servicio	Puntos de demanda	*p*	Problemas resueltos	Tiempo medio (seg.)		Agujero dual medio	
				Descomp.	Relajación	Descomp.	Relajación
	10	2	10	0.11	2.09	0.44	0.00
	10	5	10	0.08	2.77	0.00	0.00
	10	8	10	0.06	3.01	0.00	0.00
	50	2	10	0.97	27.14	2.71	0.40
	50	5	10	0.84	19.40	0.08	0.00
	50	8	10	0.54	20.17	0.02	0.00
	200	2	10	10.94	154.54	6.16	2.25
10	200	5	10	8.80	131.05	0.41	0.12
	200	8	10	5.15	0.09	0.09	0.00
	500	2	10	48.47	408.99	9.33	3.09
	500	5	10	51.87	314.91	1.12	1.00
	500	8	10	32.61	316.61	0.12	0.02
	880	2	10	155.92	403.60	9.16	3.50
	880	5	10	135.31	461.12	1.56	1.49
	880	8	10	95.01	544.97	0.13	0.05
	20	4	10	0.81	16.15	0.38	0.05
	20	8	10	0.70	15.79	0.03	0.00
	20	12	10	0.62	15.56	0.00	0.00
	100	4	10	8.28	140.13	1.61	0.42
20	100	8	10	7.74	112.42	0.14	0.00
	100	12	10	6.43	98.99	0.04	0.00
	480	4	10	95.97	195.35	5.43	2.70
	480	8	10	95.58	108.65	0.94	0.40
	480	12	10	80.11	436.40	0.14	0.00
	50	4	10	11.65	197.16	1.52	0.22
	50	8	10	14.41	134.70	0.21	0.01
	50	12	10	13.93	135.62	0.07	0.00
50	200	4	10	56.74	145.44	6.45	2.38
	200	8	10	85.13	207.40	1.59	0.75
	200	12	10	115.95	161.74	0.23	0.04

Fuente: Elaboración propia

Del análisis de los resultados del presente artículo llegamos a las siguientes conclusiones:

1. El método de la descomposición lagrangiana es un método que permite resolver el problema (P) produciendo una mejor cota del valor de la función objetivo que la cota que produce el método de la relajación lagrangiana.

2. Al aplicar la descomposición lagrangiana en la formulación del problema de localización de la p-mediana generalizado, el problema se descompone en dos subproblemas diferentes, cada uno sobre una estructura especial de restricciones que al resolverlos por inspección llegamos a obtener una cota inferior y una cota superior para el valor óptimo de nuestro problema.

3. La descomposición lagrangiana mantiene todas las restricciones del problema durante el proceso de solución a diferencia de la relajación lagrangiana.

4. El algoritmo heurístico basado en el método de descomposición lagrangiana resuelve el problema en estudio, con mayor rapidez comparado con el método de relajación lagrangiana más optimización subgradiente.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Guignard M. Lagrangean Relaxation, Operations and Information Management Department.University of Pennsylvania. 2003; 11(2): 151-228,.

[2] Guignard M, Lagrangean Decomposition and Lagrangean substitution for Stochastic Integer Programming Operations and Information Management Department. Pennsylvania:University of Pennsylvania; 2003.

[3] Glover F, Klingmand D. Layering Strategies for Creating Exploitable Structure in Linear and Integer Programs. Center for Business Decision Analysis Report. Nov 1985; 119.

[4] Nickel E. Location Theory. Berlín: Springer-Verlag; 2005.

[5] Carrizosa E. Algunas aportaciones de la investigación operativa a los problemas de localización. GeoFocus. 2005; (5): 268-277.

[6] Cornuejols G, Fisher M, Nemhauser G. On the uncapacitated location problems. Ann. Discrete Math. 1977; 1:163-177.

[7] Cho DC, Johnson E, Padberg M , Rao MR. On the uncapacita-ted Plant Location Problem. I: Valid inequalities and Facets. II: Facets and Lifting theorems. Math. of O.R. 1983, 8(4), 579-612.

[8] Conn A, Cornuejols YG. A Projection method for the uncapacited facility location problem. Math. Programming. 1990; 46: 273-298.

[9] Guignard M. Lagrangean Relaxation. Department of OPIM. The Warton School. University of Pennsylvania. 2008.

[10] Beasley JE. Lagrangian heuristics for location problems. The Management School. Londres: Imperial College; 1990

[11] Marin P, PelegrÍn PB. Heurísticas de descomposición lagrangiana para algunos problemas de localización

para algunos problemas de localización discreta. Prentice-Hall. Trabajos de investigación operativa. 1991; 7(3).

[12] Held M, Karp RM. The travelling salesman problem and minimum spanning trees. Operations Research.1970; 18:1138-1162.

[13] Guignard M, Kim S. Lagrangean decomposition: A model yielding stronger lagrangean bounds. Mathematical Programming. 1987; 39(2): 215–228.

[14] Jorstein K, Nasberg M. A New Lagrangean Relaxation Approach to the Ge-neralized Assignment Problem. European Journal of Operational Research. 1986;27(3): 313-323.