

## Modelo matemático para calcular el punto de equilibrio de productos múltiples.

### Mathematical model to calculate breakeven multiple products.

**Santos Santiago Javez Valladares**  
Universidad César Vallejo, Trujillo, Perú  
sjavez@ucv.edu.pe

**Recepción:** 08-05-2013 / **Aceptación:** 09-06-2013

#### RESUMEN

*Desde que una empresa se preocupa por tener un control económico de su producto o servicio que brinda, el objetivo es cubrir por lo menos sus costos, entonces dentro de la economía clásica esto se realiza con un gráfico de un Punto de Equilibrio, pero solo sirve cuando se tiene un solo tipo de producto, ¿pero qué pasa con el punto de equilibrio cuando se tiene dos, tres, cuatro, cinco o más productos que es más real?, además el punto de equilibrio da una cantidad que a veces supera la capacidad de producción, entonces ¿Cómo considerar la capacidad de producción?, pero la producción debe estar sujeta a un presupuesto. ¿Cómo considerar el presupuesto disponible para la producción?, ¿Cómo poder tener un esquema generalizado que permita lograr unir estas condiciones y otras que se presenten como la demanda?, para solucionar este problema se propone formular un modelo matemático estructurada en el lenguaje LINGO, este va a permitir tener un equilibrio de redondeo, e incluso se podría usar para punto de equilibrio con escala de precios. Entonces la propuesta es tener un modelo que calcule el punto de equilibrio múltiple, con valores enteros y que permita tomar mejores decisiones empresariales.*

**Palabras clave:** Punto de Equilibrio, Costo variable, costo fijo, modelo lineal, presupuesto.

#### ABSTRACT

*From a company that cares about have economic control of your product or service provided, the goal is to at least cover your costs, then within classical economics this is done with a graphic of a Point of Balance, but only serves when you have a single type of product, but what happens to the equilibrium point when you have two, three, four, five or more products is real?, and the equilibrium point gives an amount sometimes exceeds the production capacity, then how to consider the production capacity?, but production should be subject to a budget. How do you consider the budget available for production, How to have a generalized scheme that achieves these conditions and others join that arise as the demand?, To solve this problem is proposed to formulate a mathematical model structured in language LINGO, this will allow to have a balance of rounded, and even could be used to break even on price segment. So the proposal is to have a model that calculates the multiple equilibrium point with integer values and enables better business decisions.*

**Key words:** Balance Point, variable cost, fixed cost, linear model budget.

### 1. INTRODUCCIÓN

La economía empresarial ha generado muchos aportes a la toma de decisiones realizadas a nivel tanto gerencial como administrativa, dentro de este escenario uno de los puntos importantes en los cuales negocios tanto pequeños, medianos y grandes basan sus utilidades es generar puntos de equilibrio para que les ayuden a controlar sus propuestas de producción y ventas.

Por lo tanto es de suma importancia tener el cálculo del punto de equilibrio según las siguientes razones:

- 1.- Saber cuánto las ventas absorben el costo total.
- 2.- Conocer el incremento necesario en las ventas para tener determinada utilidad.
- 3.- Conocer el aumento necesario en las ventas para mantener la misma utilidad.
- 4.- Conocer el incremento necesario en las ventas para mantener la misma utilidad al variar los costos fijos.
- 5.- Conocer la afección de la utilidad al modificar el precio de venta sin alteración de los costos fijos o variables.(1)

La grafica usada generalmente tiene la siguiente estructura:

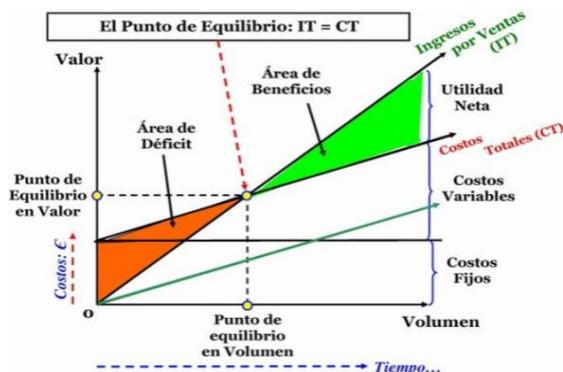


Figura 1: Punto de Equilibrio Clásico

Pero aquí viene el detalle de la siguiente investigación, esta grafica sirve cuando se tiene un solo producto, claro en años anteriores la mayoría de productores generaban ingresos basados solo en un tipo de producto, pero luego el mercado cambio, la aparición de nuevos competidores obligo a la

aparición de la diversificación de productos, ya sea por edad, ya sea por talla, ya sea por calidad, etc. (2)

Entonces ante este nuevo escenario, ¿Cómo calcular el punto de equilibrio de productos múltiples que pueden hacer en una empresa?.

### Propuestas actual de cálculo de Punto de Equilibrio para productos múltiples

La bibliografía actual propone algunas formas de cómo enfrentar este problema, consideremos el siguiente ejemplo: sea una empresa textil con los siguientes datos:

Costo fijo: s/ 3500

Tabla 1: Datos para el punto de equilibrio de productos múltiples.

Producto	Cantidad proyectada	Precio unitario	Costo variable unitario	Margen de contribución unitario
Camisas	160	40	25	15
Pantalones	96	120	80	40
t. shirts	400	20	10	10
Chompas	80	150	90	60
Ternos	64	220	170	50
	800			

La propuesta es pasar a porcentaje cantidad proyectada de la siguiente manera, por ejemplo:

Camisas =  $160/800 = 0.2$ , luego el margen de contribución ponderado es la multiplicación del margen de contribución unitario por el % de cantidad proyectada, entonces para camisas:  $15 * 0.2 = 3$ , entonces el punto de equilibrio para cada producto de la siguiente manera:  $(CF/\text{total de margen de contribución ponderado}) * \% \text{ de cantidad proyectada}$ , estos cálculos se dan en la siguiente tabla:

Tabla 2: Cantidad de Puntos de Equilibrio.

%	MARGEN	CANTIDAD
---	--------	----------

CANTIDAD PROYECTADA	CONTRIBUCION PONDERADO	DE EQUILIBRIO
0,2	3	30,70175439
0,12	4,8	18,42105263
0,5	5	76,75438596
0,1	6	15,35087719
0,08	4	12,28070175
Total	22,8	

Pero al tener esta propuesta de solución se pueden distinguir algunos objetivos que mejoren estos cálculos, estos son:

- Las cantidad de equilibrio son valores con decimales,
- Este cálculo no considera la demanda mínima y/o máxima de un producto.
- No tiene en consideración el presupuesto destinado a la producción.

### Modelo Matemático del Punto de Equilibrio para productos múltiples

Usando el software LINGO (3) se va a proponer un modelo lineal, basado en técnicas de la Investigación de operaciones, considera las siguientes variables de decisión:

CF= Costo fijo

CV<sub>i</sub>= Costo variable del producto i(i=1,2,3,4,5)

PV<sub>i</sub>= Precio de venta del producto i(i=1,2,3,4,5)

P<sub>i</sub>= Cantidad a producir del producto i(i=1,2,3,4,5)

#### Funcion Objetivo:

#### Minimizar los costos:

$$\text{MIN} = \text{CV}_1 * \text{X}_1 + \text{CV}_2 * \text{X}_2 + \text{CV}_3 * \text{X}_3 + \text{CV}_4 * \text{X}_4 + \text{CV}_5 * \text{X}_5;$$

#### Limitantes:

#### Equilibrio de ingresos y costos

$$\text{PV}_1 * \text{X}_1 + \text{PV}_2 * \text{X}_2 + \text{PV}_3 * \text{X}_3 + \text{PV}_4 * \text{X}_4 + \text{PV}_5 * \text{X}_5 = \text{CV}_1 * \text{X}_1 + \text{CV}_2 * \text{X}_2 + \text{CV}_3 * \text{X}_3 + \text{CV}_4 * \text{X}_4 + \text{CV}_5 * \text{X}_5 + \text{CF};$$

#### Precios de Venta:

$$\begin{aligned} \text{PV}_1 &= 40; \\ \text{PV}_2 &= 120; \\ \text{PV}_3 &= 20; \\ \text{PV}_4 &= 150; \\ \text{PV}_5 &= 220; \end{aligned}$$

#### Costos Variables:

$$\begin{aligned} \text{CV}_1 &= 25; \\ \text{CV}_2 &= 80; \\ \text{CV}_3 &= 10; \\ \text{CV}_4 &= 90; \\ \text{CV}_5 &= 170; \\ \text{CF} &= 3500; \end{aligned}$$

#### Producción:

$$\begin{aligned} \text{P}_1 &= 26; \\ \text{P}_2 &= 16; \\ \text{P}_3 &= 66; \\ \text{P}_4 &= 13; \\ \text{P}_5 &= 11; \end{aligned}$$

#### Componente del cálculo de equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{A} &= (1 - \text{CV}_1 / \text{PV}_1) * ((\text{PV}_1 * \text{P}_1) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)) \\ &+ (1 - \text{CV}_2 / \text{PV}_2) * ((\text{PV}_2 * \text{P}_2) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)) \\ &+ (1 - \text{CV}_3 / \text{PV}_3) * ((\text{PV}_3 * \text{P}_3) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)) \\ &+ (1 - \text{CV}_4 / \text{PV}_4) * ((\text{PV}_4 * \text{P}_4) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)) \\ &+ (1 - \text{CV}_5 / \text{PV}_5) * ((\text{PV}_5 * \text{P}_5) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)); \end{aligned}$$

#### Puntos de Equilibrio para los productos en evaluación:

$$\text{X}_1 = ((\text{PV}_1 * \text{P}_1) / (\text{PV}_1 * \text{P}_1 + \text{PV}_2 * \text{P}_2 + \text{PV}_3 * \text{P}_3 + \text{PV}_4 * \text{P}_4 + \text{PV}_5 * \text{P}_5)) * (\text{CF} / \text{A}) / \text{PV}_1;$$

$$X2 = ((PV2 * P2) / (PV1 * P1 + PV2 * P2 + PV3 * P3 + PV4 * P4 + PV5 * P5)) * (CF / A) / PV2;$$

$$X3 = ((PV3 * P3) / (PV1 * P1 + PV2 * P2 + PV3 * P3 + PV4 * P4 + PV5 * P5)) * (CF / A) / PV3;$$

$$X4 = ((PV4 * P4) / (PV1 * P1 + PV2 * P2 + PV3 * P3 + PV4 * P4 + PV5 * P5)) * (CF / A) / PV4;$$

$$X5 = ((PV5 * P5) / (PV1 * P1 + PV2 * P2 + PV3 * P3 + PV4 * P4 + PV5 * P5)) * (CF / A) / PV5;$$

**Reporte del Modelo Lineal**

Global optimal solution found.  
 Objective value: 6524.834  
 Infeasibilities: 0.2486900E-13  
 Total solver iterations: 0

Variable	Value	Reduced Cost
CV1	25.00000	0.000000
X1	30.13245	0.000000
CV2	80.00000	0.000000
X2	18.54305	0.000000
CV3	10.00000	0.000000
X3	76.49007	0.000000
CV4	90.00000	0.000000
X4	15.06623	0.000000
CV5	170.0000	0.000000
X5	12.74834	0.000000
PV1	40.00000	0.000000
PV2	120.0000	0.000000
PV3	20.00000	0.000000
PV4	150.0000	0.000000
PV5	220.0000	0.000000
CF	3500.000	0.000000
P1	26.00000	0.000000
P2	16.00000	0.000000
P3	66.00000	0.000000
P4	13.00000	0.000000
P5	11.00000	0.000000
A	0.3491329	0.000000

Al considera el reporte y las cantidades obtenidas en el punto de equilibrio por el sistema porcentual vemos que las cantidades tienen mucho de coincidencias:

Tabla 3: Puntos de Equilibrio comparativos entre los dos modelos.

Producto	Cantidad de equilibrio (clásico)	Cantidad de equilibrio (modelo lineal)
Camisas	30,701754	30.13245
Pantalones	18,421052	18.54305
t. shirts	76,754385	76.49007
Chompas	15,350877	15.06623

Ternos	12,280701	12.74834
	800	

Como puede verse el modelo elaborado coincide con los resultados obtenidos en forma clásica, entonces ahora considerando que la propuesta matemática puede mejorar la solución del punto de equilibrio generamos mejoras al modelo:

**1) Modelo con producción mínima y máxima**

```

MIN=CV1*X1+CV2*X2+CV3*X3+CV4*X4+CV5*X5;
PV1=X1+PV2*X2+PV3*X3+PV4*X4+PV5*X5=CV1*X1+CV2*X2+CV3*X3+CV4*X4+CV5*X5+CF;
PV1=40;
PV2=120;
PV3=20;
PV4=150;
PV5=220;
CV1=25;
CV2=80;
CV3=10;
CV4=90;
CV5=170;
CF=3500;

P1<=26;
P2<=16;
P3<=66;
P4<=13;
P5<=11;

P1>=6;
P2>=10;
P3>=16;
P4>=3;
P5>=6;
p1+p2+p3+p4+p5<=100;

A=((1-CV1/PV1)*((PV1*P1)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))
+(1-CV2/PV2)*((PV2*P2)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))
+(1-CV3/PV3)*((PV3*P3)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))
+(1-CV4/PV4)*((PV4*P4)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))
+(1-CV5/PV5)*((PV5*P5)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5));

X1=((PV1*P1)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))* (CF/A)/PV1;
X2=((PV2*P2)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))* (CF/A)/PV2;
X3=((PV3*P3)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))* (CF/A)/PV3;
X4=((PV4*P4)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))* (CF/A)/PV4;
X5=((PV5*P5)/(PV1*P1+PV2*P2+PV3*P3+PV4*P4+PV5*P5))* (CF/A)/PV5;
    
```

Reporte: consideramos el reporte, pero aun las variables Xi son decimales:

Objective value: 5975.225  
 Infeasibilities: 0.5684342E-13  
 Total solver iterations: 11

Variable	Value	Reduced Cost
CV1	25.00000	0.000000
X1	9.459459	0.000000
CV2	80.00000	0.000000
X2	15.76577	0.000000
CV3	10.00000	0.000000
X3	102.4775	0.000000
CV4	90.00000	0.000000
X4	20.49550	0.000000
CV5	170.0000	0.000000
X5	9.459459	0.000000
FV1	40.00000	0.000000
FV2	120.0000	0.000000
FV3	20.00000	0.000000
FV4	150.0000	0.000000
FV5	220.0000	0.000000
CF	3500.000	0.000000
P1	6.000000	0.000000
P2	10.00000	0.000000
P3	65.00000	0.000000
P4	13.00000	0.000000
P5	6.000000	0.000000
A	0.3693844	0.000000

Como puede verse los valores Xi (puntos de equilibrio) ya tienen valores enteros.

Local optimal solution found.  
 Objective value: 6020.000  
 Objective bound: 6020.000  
 Infeasibilities: 0.1092648E-03  
 Extended solver steps: 11  
 Total solver iterations: 1170

Variable	Value
CV1	25.00000
X1	10.00000
CV2	80.00000
X2	17.00000
CV3	10.00000
X3	109.00000
CV4	90.00000
X4	18.00000
CV5	170.0000
X5	10.00000
FV1	40.00000
FV2	120.0000
FV3	20.00000
FV4	150.0000
FV5	220.0000
CF	3500.000
P1	6.000000
P2	10.20002
P3	65.39993
P4	10.80000
P5	6.000000
A	0.3676470

2) **Modelo considerando el redondeo de los puntos de equilibrio:**

Al añadir el comando @ gin ( ) a las variables Xi se tiene:

```

MIN=CV1*X1+CV2*X2+CV3*X3+CV4*X4+CV5*X5;
FV1*X1+FV2*X2+PV3*X3+PV4*X4+PV5*X5=CV1*X1+CV2*X2+CV3*X3+CV4*X4+CV5*X5+CF;
FV1=40;
FV2=120;
FV3=20;
FV4=150;
FV5=220;
CV1=25;
CV2=80;
CV3=10;
CV4=90;
CV5=170;
CF=3500;
P1<=26;
P2<=16;
P3<=66;
P4<=13;
P5<=11;
P1>=6;
P2>=10;
P3>=16;
P4>=3;
P5>=6;
p1+p2+p3+p4+p5<=100;
A=(1-CV1/FV1)*((FV1*P1)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV2/FV2)*((FV2*P2)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV3/FV3)*((FV3*P3)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV4/FV4)*((FV4*P4)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV5/FV5)*((FV5*P5)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5));
X1=((FV1*P1)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV1;
X2=((FV2*P2)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV2;
X3=((FV3*P3)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV3;
X4=((FV4*P4)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV4;
X5=((FV5*P5)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV5;
@gin(x1);
@gin(x2);
@gin(x3);
@gin(x4);
@gin(x5);
    
```

Reporte:

- 3) Considerando el modelo inicial ,se ha agregado ahora otras dos limitantes:
  - a) Capacidad de producción
  - b) Presupuesto disponible. Entonces se tiene:

```

CF=3500;
P1<=26;
P2<=16;
P3<=66;
P4<=13;
P5<=11;

P1>=6;
P2>=10;
P3>=16;
P4>=3;
P5>=6;

P1+P2+P3+P4+P5<=100;
CV1*X1+CV2*X2+CV3*X3+CV4*X4+CV5*X5+CF<=40000;

A=(1-CV1/FV1)*((FV1*P1)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV2/FV2)*((FV2*P2)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV3/FV3)*((FV3*P3)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV4/FV4)*((FV4*P4)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))
+(1-CV5/FV5)*((FV5*P5)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5));
X1=((FV1*P1)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV1;
X2=((FV2*P2)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV2;
X3=((FV3*P3)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV3;
X4=((FV4*P4)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV4;
X5=((FV5*P5)/(FV1*P1+FV2*P2+FV3*P3+FV4*P4+FV5*P5))*(CF/A)/FV5;
@GIN(X1);
@GIN(X2);
@GIN(X3);
@GIN(X4);
@GIN(X5);

@GIN(P1);
@GIN(P2);
@GRTN(P3);
    
```

Reporte:

```

6150.000
6150.000
0.1280398E-10
    156
    13706
    
```

Variable	Value
CV1	25.00000
X1	20.00000
CV2	80.00000
X2	20.00000
CV3	10.00000
X3	100.0000
CV4	90.00000
X4	15.00000
CV5	170.0000
X5	10.00000
FV1	40.00000
FV2	120.0000
FV3	20.00000
FV4	150.0000
FV5	220.0000
CF	3500.000
F1	12.00000
F2	12.00000
F3	60.00000
F4	9.000000
F5	6.000000
A	0.3626943

Como se puede apreciar, todas las cantidades (claro a excepción de A) son valores enteros.

### CONCLUSIONES

1. Un modelo lineal puede convertir a los valores del punto de equilibrio en valores enteros.

2. Considerar limitantes de demanda mínima y máxima mejoran el cálculo de punto de equilibrio.
3. El presupuesto también se puede considerar en este modelo matemático.
4. Es más confiable la toma de decisiones basado en un modelo de programación lineal que permite considerar varias limitantes al mismo tiempo.

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Izquierdo, Enrique Polanco. *Contabilidad Administrativa*. Bogotá : Ecoe Ediciones, 2007. 978-958-648-515-9.
- [2] Gould, Eppen. *Investigación de Operaciones en las ciencias Administrativas*. Mexico : Prentice-Hall, 2000. 970-17-0270-0.
- [3] LINDO. [www.LINDO.com](http://www.LINDO.com). [En línea] 14 de 04 de 2013.