



Fundamentos teóricos de la investigación sobre el aprendizaje de la matemática en aula: primeros elementos de didáctica de la matemática¹

Theoretical foundations of the investigation on the learning of the mathematics in classroom: first elements of didactics of the mathematics

Bruno D'Amore²

MESCUUD, Universidad Distrital "F. José de Caldas", Bogotá, Colombia

Recepción: 12 de agosto de 2017 - Aceptación: 10 de octubre de 2017

Resumen

La actual investigación en didáctica disciplinar está direccionada a centrar la atención sobre el fenómeno del aprendizaje, pero desde un punto de vista fundacional y de cualquier forma no aceptando un único modelo de teoría de aprendizaje (incluso si la psicología cognitiva en este momento parece la más autorizada a dar fundamentos interesantes para muchas experiencias de investigación). Afrontando la didáctica disciplinar como epistemología del aprendizaje, haré ejemplos sólo en el campo que me compete, es decir en el de la Matemática. Pero, discusiones con colegas, didactas de otras disciplinas y lecturas ocasionales, me han confirmado el hecho que las problemáticas generales parecen ser las mismas, incluso en las diversas especificidades. Por tanto, aun no deseando (pudiendo) salir del estrecho ámbito dicho, estoy convencido que no muy diversos serán los posibles análogos análisis críticos que pertenecen a otros sectores de investigación. Lo que haré aquí será rápidamente aclarado. Analizaré algunas de las problemáticas que parecen emerger con más fuerza en los últimos años, que se han consolidado como elementos de investigación en Didáctica de la Matemática, y que me parece proporcionan bases sólidas y significativas para una posible generalización. Me abstendré de presentaciones demasiado técnicas y me limito por tanto sólo a la posición de cada uno de los problemas propuestos, presentando, en resumen, en los siguientes apartados, algunas técnicas bastante difusas en el ambiente de investigación y que parecen ser de particular interés especialmente para los profesores. Haré, hasta donde sea posible, referencia a investigaciones, para dar la idea al lector de aquello que los investigadores, algunos investigadores, hacen en Didáctica de la Matemática.

Palabras clave: didáctica de la matemática, ruptura del contrato, misconcepciones.

Abstract

Current research in disciplinary didactics is directed to focus attention on the phenomenon of learning, but from a foundational point of view and in any way not accepting a single model of learning theory (even if cognitive psychology at this time seems the most authorized to give interesting foundations for many research experiences). Facing disciplinary didactics as epistemology of learning, I will make examples only in the field that concerns me, that is to say in Mathematics. But, discussions with colleagues, didacts of other disciplines and occasional readings, have confirmed to me the fact that the general problems seem to be the same, even in the different specificities. Therefore, even not wishing (being able) to leave the narrow scope said, I am convinced that not very diverse will be the possible analogous critical analyzes that belong to other research sectors. What I will do here will be quickly clarified. I will analyze some of the problems that seem to emerge more strongly in recent years, which have been consolidated as research elements in Mathematics Didactics, and which I think provide a solid and meaningful basis for a possible generalization. I will refrain from presentations that are too technical and therefore I will limit myself to the position of each one of the proposed problems, presenting, in summary, in the following sections, some rather diffuse techniques in the research environment that seem to be of particular interest, especially for teachers. I will do, as far as possible, reference to research, to give the reader an idea of what the researchers, some researchers, do in Didactics of Mathematics.

Keywords: mathematics didactics, contract breakdown, misconceptions.

Cómo citar el artículo: D'Amore, B. (2018). Fundamentos teóricos de la investigación sobre el aprendizaje de la matemática en aula: primeros elementos de didáctica de la matemática. *Revista científica EDUSER*, 5(1), 15 – 46, <http://revistas.ucv.edu.pe/index.php/EDUSER/issue/view/191>

¹ Artículo calificado *magna cum laude* (Revista científica Eduser agradece el valioso aporte del profesional).

² Ph.D., especialista en área de educación matemática, profesional de Universidad de Bologna, Italia.

Introducción

El contrato didáctico.

Después de la mitad de los años '70 hace ingreso en el mundo de la investigación en Didáctica de la Matemática la idea de *contrato didáctico*, lanzada por Guy Brousseau ya desde los años '60 pero hecha famosa gracias al célebre artículo del 1986 (Brousseau, 1986). La idea se reveló rápidamente fructífera y vino definitivamente sancionada por las investigaciones de los primeros años '80. Fueron después los estudios de la segunda mitad de los años '80 a decretar el triunfo y la plena teorización; en esta participaron varios estudiosos de todo el mundo: la idea viene reconocida y entra a formar parte del lenguaje aceptado por la entera comunidad internacional.

Esta idea, de espíritu del todo francés,³ no era del todo nueva. En 1973, Jeanine Filloux introdujo el término de *contrato pedagógico* para definir algunos tipos de relaciones entre profesor y alumno. La idea de J. Filloux era un contrato general, más social que cognitivo, mientras que el contrato didáctico de Brousseau tiene en cuenta también el conocimiento en juego. El primer intento de “definición” del contrato didáctico, es el siguiente: «En una situación de enseñanza, preparada y realizada por el maestro, el alumno generalmente tiene como tarea la de resolver un problema (matemático) por él presentado, pero el acceso a esta tarea se hace a través de una interpretación de la pregunta puesta, de las informaciones dadas, de las exigencias impuestas que son constantes de la forma de enseñar del maestro. Estos hábitos (específicos) del docente esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el docente constituyen el contrato didáctico» (Brousseau, 1986, p. 102).

Generalmente estas “expectativas” no son debidas a acuerdos explícitos, impuestos por la escuela o por los docentes o concordados con los alumnos, sino a la concepción de la escuela, de la Matemática, a la repetición de modalidades.

Traeré ahora algunos ejemplos de la vasta literatura al respecto. En esta, la interpretación de “contrato didáctico” es increíblemente vasta, como de otra parte es testimoniado en Sarrazy (1995, p. 65).

Ej. 1 (concepción de la escuela). El alumno considera que la escuela es directiva y evaluativa; por tanto, si el maestro pide al alumno, por ejemplo, de escribir *libremente* lo que piensa sobre un cierto argumento, el alumno considera que debe hacerlo con un lenguaje lo más cercano posible al “rigor” porque supone que bajo esta solicitud existe alguna forma de prueba, un control. No escribirá de hecho “libremente” sino que, por el contrario, buscará dar una definición que considera ser aquella ‘correcta’, es decir aquella que piensa es la esperada por el maestro.

Ej. 2 (concepción de la Matemática). El estudiante considera que en Matemática se *deben* hacer cálculos; por lo que, aún si la respuesta a la pregunta dada dentro de un problema puede ser comunicada sólo con palabras, el estudiante se siente en ansia y tiende a hacer uso operativo de los datos numéricos para dar de todas formas una respuesta formal.

³ Estoy pensando en Jean-Jacques Rousseau y su *Contrato social* (1762).

Ej. 3 (repetición de modalidades). Por tres lunes consecutivos el profesor de Matemática hace que se resuelvan ejercicios en el tablero; a partir de este hecho, el alumno “sabe” que cada lunes será así; por tanto, un cambio en el programa esperado genera sorpresa. Lo mismo sucede, por ejemplo, en cuanto a la expectativa del programa posible en el curso de una interrogación: si el docente siempre ha hecho preguntas sobre el programa desarrollado en las últimas lecciones, no puede, a decir del alumno, hacer preguntas sobre un argumento que ha sido objeto de lección en un pasado remoto...

El estudio de los varios fenómenos de comportamiento de los alumnos desde este punto de vista ha dado grandes frutos, de extremo interés. Hoy muchos comportamientos considerados hasta hace poco tiempo inexplicables o ligados al desinterés, a la ignorancia o la edad inmadura, han sido por el contrario clarificados.

Uno de los estudios más notables es aquel que se conoce bajo el nombre de *Efecto edad del capitán* (creo que esta denominación fue acuñada por Adda, 1987, como lo confirma Sarrazy, 1995, p. 86). El nombre está ligado a un célebre y antiguo problema (que se encuentra también en Peano, 1924, p. 38) en el cual, dado los datos de un barco (color, longitud del casco, altura de los mástiles,...), se pide la edad del capitán. El comportamiento interesante de los alumnos de frente a este tipo de problema “absurdos” o “imposibles” fue dado a la luz en el IREM de Grenoble en 1980 (IREM Grenoble, 1980, p. 57), pero después dió notables frutos en lo que hoy se llama *ruptura del contrato*.

Yo lo contaré enseguida, así como lo he vivido (y hecho vivir) personalmente (D’Amore, 1993a, p. 56). En una clase de IV elemental (edad de los alumnos 9 - 10 años) de un importante centro agrícola, he propuesto el célebre problema (en el cual el “capitán” se transforma en un “pastor”): «Un pastor tiene 12 ovejas y 6 cabras. ¿Cuál es la edad del pastor?».

En coro, con seguridad, y *todos* los niños sin excepción y sin ninguna reserva, han dado la respuesta esperada: «18». De frente al malestar de la maestra, respondí explicándole que se trata de un hecho ligado al contrato didáctico: ella nunca había dado un problema sin solución, o imposible (de una de las tantas formas de imposibilidad) (D’Amore, Sandri, 1993, p. 83); por tanto, los niños habían introducido en el contrato didáctico una “cláusula” en base a la cual, por así decirlo: «Si la maestra nos da un problema, este ciertamente debe ser resuelto». Y, dado que rige otra cláusula terrible según la cual los datos numéricos presentes en el texto tienen que ser tomados todos (una y solo una vez), y posiblemente en el orden en el cual aparecen, los niños de aquella clase no tenían ninguna posibilidad, ninguna alternativa: *debían* responder usando los datos 12 y 6. La única duda estaba sólo en la elección de la operación a seguir. Ahora, puede darse que aquella de la adición haya sido una elección casual; pero se debe decir que a la solicitud hecha a un niño rubio particularmente vivaz de explicar por qué no había hecho la división, él después de un momento de reflexión, se ha justificado: «No, ¡es demasiado pequeño!», refiriéndose obviamente a la edad del pastor... y por tanto restituyendo de toda forma un *sentido* a una situación que de hecho parecía no tenerlo.

Con la expresión *efecto «edad del capitán»* se designa hoy la conducta de un alumno que calcula la respuesta de un problema utilizando una parte o la totalidad de los números que son dados en el enunciado, aunque este problema no tenga de hecho una solución numérica.

Naturalmente, el “caso” no es exclusivo de la escuela elemental sino que, cambiando lo que sea de cambiar, interesa todos los niveles escolares.

Tal efecto entra, como ya lo he dicho poco antes, entre aquellos considerados de *ruptura* del contrato didáctico: si incluso el alumno se da cuenta de la absurdidad del problema dado, necesita hacerse cargo personal de una ruptura del contrato didáctico, para poder responder que el problema no se puede resolver. Esta nueva situación, de hecho, contrasta con todas sus expectativas, con todos sus hábitos, con todas las cláusulas hasta aquí puestas en campo en las situaciones didácticas. Pero el estudiante no tiene la fuerza, no siendo nunca antes habituado, de romper el contrato y prefiere respetar las supuestas cláusulas para no arriesgar, para no osar en primera persona.

Estudios profundos sobre el contrato didáctico han permitido revelar de hecho que los niños y los jóvenes tienen expectativas particulares, esquemas generales, comportamientos que nada tienen que ver *estricto sensu* con la Matemática, sino que dependen del contrato didáctico instaurado en clase.

Por ejemplo, en una investigación sobre los problemas con datos que faltan y sobre la actitud de los alumnos frente a problemas de este tipo (D’Amore, Sandri, 1998, p. 88), se propuso el siguiente texto en 3° de primaria (alumnos de 8 – 9 años) y de 2° media (alumnos de 12 – 13 años):

«Giovanna y Paula van al mercado; Giovanna gasta 10.000 liras y Paula gasta 20.000 liras. ¿A quién de las dos le ha quedado más dinero en la bolsa, a Giovanna o a Paula?»

He aquí una muestra de la respuesta más difusa en el grado 3° de primaria; elijo como prototipo la respuesta de Stefanía, que reporto exactamente como la ha redactado la alumna:

Stefanía:

En la bolsa le ha quedado más dinero a Giovanna

$$30-10=20$$

$$10\times 10=100$$

La respuesta “Giovanna” (58,4% de tales respuestas en 3° de primaria, alumnos de 8 - 9 años) es justificada del hecho que (cláusulas de las expectativas y de la constancia) el estudiante considera que, si el maestro le ha dado un problema, este *debe poderse resolver*; por tanto, aún si se da cuenta que falta el dato de la suma inicial, se lo inventa implícitamente más o menos como sigue: «Este problema *debe* ser resuelto; por tanto, quizás Giovanna y Paula han partido con la misma cantidad de dinero». A este punto, *la respuesta Giovanna es correcta*: Giovanna gasta menos y por tanto le queda más dinero en la bolsa. Y esto justifica la parte dada en palabras de la respuesta de Stefanía. Después se desencadena otro mecanismo ligado a otra cláusula (del tipo: imagen de la Matemática, expectativas de parte de la maestra): «No puede bastar así, en

Matemática se deben hacer “cuentas” la maestra se lo espera de cierto». A este punto, el control crítico se pierde y... cualquier cálculo va bien...

En el trabajo D’Amore, Sandri (1998, p. 91), hemos llamado esta cláusula del contrato didáctico: “exigencia de la justificación formal” (ejf), estudiándola con todo detalle. Tal cláusula ejf está bastante presente incluso en la escuela media (edad de los alumnos 11 - 14 años). [El porcentaje de respuesta “Giovanna” baja del 58,4% de la escuela primaria (8 - 9 años) al 24,4% de la segunda media (12 – 13 años); pero sólo el 63,5% de los alumnos de 2º media denuncia de alguna forma la imposibilidad de dar una respuesta; por tanto, el 36,5% da una respuesta: más de 1/3 de cada clase].

Aquí un prototipo de respuesta dada al mismo problema en 2º media; he elegido el protocolo de respuesta de una alumna, reportándolo exactamente como ella lo ha elaborado:

Silvia:

Para mí, a quien le ha quedado más dinero en la bolsa es a Giovanna [después corregido: Paula] porque:

Giovanna gasta 10.000 mientras Paula gasta 20.000

10.000	20.00
--------	-------

Giovanna	Paula
----------	-------

$20.000 - 10.000 = 10.000$ (dinero de Giovanna)

$10.000 + 10.000 = 20.000$ (dinero de Paula)

En el protocolo de Silvia se reconocen en acción las mismas cláusulas del contrato didáctico activadas en acción en el protocolo de Stefanía, pero su análisis es más complejo. En primer lugar, se nota un intento de organización formal y lógica más elaborado. Silvia, además, escribe en primer lugar “Giovanna” porque ha razonado de la misma forma como lo ha hecho Stefanía; después, pero, a causa de la cláusula ejf, considera que *debe* hacer “cuentas”. Es posible que se dé cuenta, aunque en forma confusa, que las operaciones que está haciendo están desligadas del problema, las hace sólo porque considera que *debe hacer* algún cálculo. Pero, por cuanto absurdas, termina por asumirlas como plausibles: tan es así que, dado que con estas operaciones sin sentido obtiene un resultado que contrasta con aquello dado en forma intuitiva, prefiere violentar la propia intuición y aceptar todo lo obtenido por vía “formal”: los cálculos le dan “Paula” como respuesta y no “Giovanna”, como en cambio había supuesto; y es entonces cuando borra “Giovanna” y a su puesto escribe “Paula”.

El contrato didáctico, que esta vez es dictado de una imagen formal de la Matemática (en vacío, deletéreo), ha ganado, anulando la razón...

En D’Amore (1993b, p. 77), cuento una curiosa experiencia basada sobre el siguiente texto, dado en una escuela primaria a diversas clases:

«Los 18 alumnos de segundo desean hacer una excursión de un día de Bologna a Verona. Deben tener presente las siguientes consideraciones:

- dos de ellos no pueden pagar
- de Bologna a Verona hay 120 km
- por un autobús de 20 puestos se debe pagar 200.000 liras por el día más 500 liras por cada kilómetro (incluido el pago de los peajes).
¿Cuánto debe pagar cada alumno?»

Inútil decir que se trataba de un problema complejo, que se quería realmente efectuar la programación de una excursión, que los estudiantes debían discutir en grupo el problema y buscar la solución etc.

De hecho, un gran número de estudiantes, de frente a la solución de este problema, comete un error recurrente: no tiene en cuenta el viaje de retorno y calcula el gasto total con la expresión errada: $500 \times 120 + 200.000$.

Sobre este punto existe una vasta bibliografía que tiende a justificar este hecho. Una de las justificaciones más recurrentes era una mezcla de... olvido estratégico o efectivo: el andar en una excursión es el momento emotivamente más fuerte, el retorno no.

Para tratar de entender mejor la cuestión, separé el problema en varias componentes o fases, con tantas “pregunticas” parciales específicas; pero el error se repetía. Sugerí entonces a algunos profesores hacer que los alumnos representaran los varios momentos de la excursión. El caso increíble que encontré el cual describí en D’Amore (1993b, p. 94) es el de un niño que ha dibujado un autobús y debajo de estas dos flechas: en una estaba escrito: «Bologna → Verona 120 km», en la otra «Verona → Bologna 120 km», lo que indica que existe una perfecta conciencia del hecho que en una excursión existen la ida y el regreso; pero después aquel mismo niño, al momento de resolver el problema, utiliza sólo el dato de la ida.

Una de las explicaciones mayormente presentes de los niños durante las entrevistas es que ellos no se sienten autorizados a usar un dato que explícitamente no aparece en el texto. Cuenta poco el sentido de la solicitud contenida en los problemas de Matemática, aquello que cuenta es hacer uso de los datos numéricos explícitamente propuestos como tales. Uno de los niños entrevistado declara: «Si tu querías que calculáramos también el retorno, debías decírnoslo»; es evidente la laguna que el niño advierte: en ninguno de los datos parece lícito duplicar el gasto para el recorrido en kilómetros.

Siempre ligado al contrato didáctico, resulta muy interesante leer la actitud de los estudiantes frente al célebre problema de Alan Schoenfeld (1987a, p. 101): «Un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si 1128 soldados deben ser transportados en autobús al campo de adiestramiento, ¿cuántos autobuses deben ser usados?».

De los 45.000 alumnos de 15 años de los Estados Unidos que participaron en la prueba de Schoenfeld, sólo un cuarto (23 %) logra dar la respuesta esperada: 32. El investigador norteamericano afirma por tanto que muy pocos estudiantes están en grado de releer el sentido de la pregunta, osando escribir “32”, de hecho, no obtenido formalmente de la operación, y propone como causa de este comportamiento cuestiones relativas a hechos metacognitivos.

A distancia de varios años, recientemente hemos querido analizar de nuevo la misma situación (D'Amore, Martini, 1997, p. 66) y encontramos algunas novedades. La prueba fue realizada en varios niveles escolares dejando libertad a los estudiantes de usar o no la calculadora. Obtuvimos varias respuestas del tipo: $31,333333$ especialmente de parte de quien usaba la calculadora; otras respuestas fueron: $31,\bar{3}$ y $31,3$.

El control semántico, cuando existe, lleva a algún alumno a escribir 31 (un autobús «no puede separarse»), pero muy pocos se sienten *autorizados* a escribir 32. Entre quienes usan la calculadora, se encontró el 0 % de respuesta “32”.

El estudiante no se siente autorizado a escribir aquello que no aparece después de efectuada una operación: aún, haciendo el control semántico sobre los autobuses como objetos no divisibles en partes, esto no autoriza a escribir “32”; hay quien de hecho no se siente autorizado ni siquiera a escribir “31”.

No se puede hablar simplemente de “error” de parte del estudiante, a menos que no se entienda por “error” la incapacidad de controlar, una vez obtenida la respuesta, si dicha respuesta es semánticamente coherente con la pregunta dada. Pero entonces se desencadena otro mecanismo: el estudiante no está dispuesto a admitir de haber cometido un error y prefiere hablar de un “truco”, de una “trampa”; para el estudiante un error matemático o en Matemática, es un error de cálculo o asimilable a este, no de tipo semántico.

Un largo y sistemático estudio de esta prueba, realizado incluso a través de numerosas entrevistas a los estudiantes, revela que “el culpable” de este comportamiento es una cláusula del contrato didáctico, a la cual ya habíamos dado el nombre de “cláusula de delega formal”. El estudiante lee el texto, decide la operación a efectuar y los números con los cuales debe operar; a este punto salta la cláusula de la *delega formal*: no es tarea del estudiante razonar o controlar. Sea que haga los cálculos a mano, *más aún* si hace uso de la calculadora, se instaura aquella cláusula que... limita las facultades racionales, críticas, de control: el compromiso del estudiante está concluido y ahora le corresponde al algoritmo, o mejor aún a la máquina, trabajar para él. La tarea sucesiva del estudiante será aquella de transcribir el resultado, sea cual sea y sin importar que cosa signifique, en el contexto problemático.

Los estudios sobre el contrato didáctico, prácticamente adelantados en todo el mundo, se están revelando fructíferos y han dado, en pocos años, resultados de gran interés, que siempre más nos están haciendo conocer la epistemología del aprendizaje matemático.

Conflictos y misconcepciones.

Otro argumento de estudio en Didáctica de la Matemática que está emergiendo con fuerza y que tiene gran importancia hace referencia a los *conflictos cognitivos*. Se trata de lo siguiente: el estudiante ha podido, en el transcurso del tiempo, haber adquirido un concepto y haberse

hecho una imagen; esta imagen pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas. Pero puede ser que tal imagen, antes o después, se revela inadecuada, respecto a otra del mismo concepto, por ejemplo, propuesta por el mismo maestro o por otros, y no esperada, es decir en contraste con la precedente. Se crea así un *conflicto* entre la precedente imagen, que el estudiante creía definitiva, relativa a dicho concepto, y la nueva; esto sucede especialmente cuando la nueva imagen amplía los límites de aplicabilidad del concepto, o proporciona una versión más completa.

Ligada a las ideas de “imagen de un concepto” y de “conflicto”, existe una importante cuestión que tiene que ver con las *misconcepciones*. Una *misconcepción* es un concepto errado y por tanto constituye genéricamente un evento de evitar; pero, esta no va vista siempre como una situación del todo negativa: no se excluye que, para alcanzar la construcción de un concepto, sea *necesario* pasar a través de una *misconcepción* momentánea, en curso de organización.

Se puede notar como, al menos en determinados casos, algunas imágenes pueden ser verdaderas y propias *misconcepciones*, es decir interpretaciones erradas de las informaciones recibidas.

Aquí se presenta la vasta e interesante problemática del “currículo oculto”. El estudiante revela las propias *misconcepciones*, por ejemplo, cuando aplica *correctamente* reglas *incorrectas*. Generalmente, al origen de este hecho existe una falta de comprensión y una errada interpretación. Si el profesor no se da cuenta de esto, sus solicitudes caen en el vacío porque el estudiante ha incluido en su propio currículo aquellas reglas que considera correctas y que, en algunos casos, han funcionado.

Por ejemplo, en un curso de 3° de primaria, un estudiante realizaba así las siguientes sustracciones en columna:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
—	—	—	—
13	22	12	13

El profesor observó que tres sustracciones de las cuatro propuestas estaban realizadas correctamente; por tanto, evaluó positivamente el trabajo, pero invitó al estudiante a dar mayor atención cuando debía “tomar prestada una decena”. Lo que el estudiante no entendía era de que decena se estaba hablando ya que él tenía otra regla personal: para realizar la sustracción en columna se procede de derecha a izquierda, y en cada columna, se sustrae del más grande el más pequeño. De esto tenía confirmación en muchos casos; la información que explicaba casos como el de la tercera sustracción no la había percibido, y por esto, había asimilado en su currículo aquella “regla” personal. Dicha regla funcionaba *casi* siempre y en los casos negativos no

entendía el por qué: estaba usando *correctamente*, de hecho, una regla que no sabía en cambio que era incorrecta. Una verdadera y propia *misconcepción*. [Sobre la diferencia entre currículo enseñado y currículo aprendido, véase Fandiño (2002, p. 81)].

Algunos ejemplos reportados de la vasta literatura.

Ej. 1. El estudiante siempre ha visto imágenes de rectángulos con los lados (base y altura) de longitud diversa (incluso si en la definición propuesta se habla sólo de paralelogramos con ángulos rectos). Él tiene entonces incorporada como imagen – prototipo del rectángulo una figura que *debe* tener base y altura diferentes.

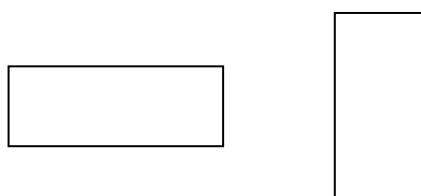


Figura 1. Prototipo de rectángulo incorporada como imagen

Un día el maestro analiza más a fondo desde un punto de vista lógico la definición de rectángulo, a partir del paralelogramo, y muestra como la solicitud tiene que ver sólo con la amplitud de los cuatro ángulos internos (que deben ser todos rectos) y por tanto no excluye el caso del cuadrado, pensándolo como un rectángulo que tiene la altura y la base de igual medida.



Figura 2. Definición del rectángulo desde el paralelogramo

Nace o, mejor, puede nacer, un conflicto cognitivo, ligado al prototipo de figura esperada (y confirmada de la experiencia), entre la imagen de rectángulo (que excluye el cuadrado) y la nueva imagen propuesta.

Ej. 2. Un estudiante de 1º de primaria había siempre visto dibujado un rectángulo “apoyado” sobre la base horizontal y con altura, vertical, más corta; se había hecho una imagen del concepto de “rectángulo” hecho así y tal imagen había sido siempre confirmada por la experiencia.



Figura 3. Prototipo de rectángulo desde posición 1

Un buen día le viene propuesta una imagen de rectángulo que tiene la base si horizontal (y por tanto la altura vertical), pero la base es más corta que la altura.

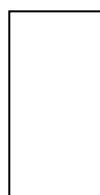


Figura 4. Prototipo de rectángulo desde posición 2

Significativa la denominación que el niño ha dado espontáneamente, para adecuar el concepto ya asumido a la nueva imagen, definiendo esta “nueva forma” como «rectángulos en pie».

Se reconoce en esta denominación espontanea el resultado feliz de un conflicto cognitivo entre una concepción (imagen de “rectángulo” que parecía estable y que por el contrario era hasta el momento sólo en curso de consolidación) y la nueva imagen propuesta sabiamente por el profesor.

[Una vez me sucedió algo similar con profesores de escuela media; al sentir que yo llamaba “trapecio” a una figura dibujada así:

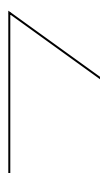


Figura 5. Prototipo de trapecio en profesores

Se presentaron fuertes reacciones de no aceptación, al principio..., obviamente inmediatamente resueltas. La posición estereotipada de trapecio, en dicho momento ha creado (sólo se trató de pocos segundos) una situación de malestar].

Los ejemplos podrían continuar, pero considero que estos pueden bastar.

Por tanto, el conflicto cognitivo es un conflicto “interno” causado de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto.

Pero el conflicto también puede ser social. Supongamos que un estudiante tiene una imagen o un concepto para un cierto argumento y que considere que este o esta es compartido por toda la clase (o,

más en general, por toda la sociedad); un buen día tal imagen o tal concepto entra en conflicto con aquel propuesto por el profesor y/o por una nueva situación y, en dicha ocasión, el estudiante se da cuenta que su idea no es compartida con la clase, es más, sólo tiene que ver con él, está aislado; por ejemplo sus compañeros no se asombran de una propuesta que él, por el contrario, no logra aceptar.

Un ejemplo únicamente: un cuadrado es casi siempre dibujado y propuesto en los libros de texto con los lados horizontales y verticales, el rombo por lo general con las diagonales horizontales y verticales. El estudiante Pedrito se ha hecho la idea que los cuadrados y los rombos *deben* ser así, y está convencido que su concepción es la misma que tienen sus compañeros de clase; cree, implícitamente, que se trate de una idea totalmente compartida. Cierta día el maestro dibuja un cuadrado con las diagonales horizontal y vertical, pero no lo llama “rombo”, como lo espera Pedrito, sino “cuadrado”. Pedrito se pide: ¿El maestro se ha equivocado? Pero se da cuenta que sus compañeros aceptan sin problemas esta denominación: se trata sí de un conflicto cognitivo, pero no sólo sobre el plano individual “interno”, sino también sobre el plano social porque pone a Pedrito en conflicto con un concepto que consideraba compartido.

A la base de los conflictos existen por tanto las *misconcepciones*, es decir, concepciones momentáneas no correctas, en espera de consolidación cognitiva mejor elaboradas y más críticas. Pero atención: el estudiante no lo sabe y por tanto considera que las suyas, aquellas que para el investigador son *misconcepciones*, son por el contrario concepciones verdaderas y propias. Por tanto, es el adulto quien sabe que aquellas elaboradas y hechas propias por los jóvenes pueden ser sólo *misconcepciones*.

Llamarlas *errores* es demasiado simple y banal: no se trata de castigar, ni evaluar negativamente; se trata, por el contrario, de dar los instrumentos para la elaboración crítica.

En un cierto sentido, dado que incluso niños pequeños (de 3 a 6 años) tienen concepciones matemáticas ingenuas pero profundas obtenidas empíricamente o por intercambio social (Agli, D'Amore, 1995, p. 16), se podría pensar que toda la carrera escolar de un individuo, por lo que tiene que ver con la Matemática, está construida por el paso de *misconcepciones* a concepciones correctas.

En un cierto sentido, las *misconcepciones*, entendidas como tales (concepciones momentáneas no correctas, en espera de consolidación cognitiva más elaboradas y críticas) no pueden ser eliminadas, ni constituyen del todo un daño. Parece ser un momento necesario y delicado de pasaje, de una prima concepción elemental (ingenua, espontánea, primitiva,...) a una mejor elaborada y más correcta.

A la base de este tipo de problemática, colocaría algunos estudios de Piaget – Inhelder, incluso si hoy existe una gran evolución en la investigación en este campo. Estas invaden incluso la fijación funcional, el efecto *Einstellung*, los parásitos cognitivos etc.

Para no extenderme demasiado, remito a (D'Amore, 1993b; Sbaragli, 2005; D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 13).

Imágenes y modelos.

Apenas una rápida mirada sobre este complejo argumento. Dado que he hecho referencia, líneas arriba, a términos como “imagen” y “modelo” veo necesario hacer claridad sobre lo que acepto con la siguiente terminología (pero, no totalmente compartida).

“Imagen mental” es el resultado figural o proposicional producto de un estímulo (interno o externo). La imagen mental está condicionada de influencias culturales, estilos personales, en pocas palabras es un producto típico del individuo, pero con constantes y connotaciones comunes entre individuos diversos. Estas pueden ser más o menos elaboradas conscientemente (pero, también esta capacidad de elaboración depende del individuo). Sin embargo, la imagen mental es interna o al menos en primera instancia involuntaria.

El conjunto de las imágenes mentales elaboradas (más o menos conscientes) y todas relativas a un cierto concepto constituyen el modelo mental (interno) del concepto mismo.

Dicho en otras palabras, el estudiante se construye una imagen I_1 de un concepto C ; él la cree estable, definitiva. Pero en un cierto punto de su historia cognitiva, recibe informaciones sobre C que no están contempladas en la imagen I_1 que tenía. Él debe entonces (y esto puede ser debido a un conflicto cognitivo, *deseado* por el profesor) adecuar la “vieja” imagen I_1 a una nueva, más amplia, que no sólo conserve las precedentes informaciones, sino que también acoge coherentemente las nuevas. De hecho, él se construye una nueva imagen I_2 de C . Tal situación puede repetirse varias veces durante la historia escolar de un alumno, obligándolo a pasar de I_2 a I_3 ...

Muchos de los conceptos de la Matemática son alcanzados gracias al pasaje, en los meses o en los años, de una imagen a otra más compleja y se puede imaginar esta sucesión de construcciones conceptuales, es decir de sucesivas imágenes $I_1, I_2, \dots, I_n, I_{n+1}, \dots$ como una especie de escalada, de “acercamiento” a C .

A un cierto punto de esta sucesión de imágenes, se llega al momento en el cual la imagen después de varios pasajes “resiste” a estímulos diversos, se demuestra bastante “fuerte” de incluir todas las argumentaciones e informaciones nuevas que llegan respecto del concepto C que representa. Una imagen de este tipo, de consecuencia estable e inalterable, se puede llamar “modelo” M del concepto C .

Por tanto, hacerse un modelo de un concepto, significa reelaborar sucesivamente imágenes (débiles, inestables) para hacer definitiva (fuerte, estable) una de estas.

Existen dos posibilidades:

- M se forma en el momento justo en el sentido que se trata en verdad del modelo correcto, precisamente aquel que el maestro deseaba para C ; la acción didáctica ha funcionado y el estudiante se ha construido el modelo M correcto (aquel deseado del maestro) del concepto C ;
- M se forma demasiado pronto, cuando aún representa sólo una imagen que habría debido ser ampliada ulteriormente; a este punto no es fácil alcanzar C , porque la estabilidad de este

parcial M es por sí misma un obstáculo para futuros aprendizajes.

Sigamos en el análisis de los modelos y de su papel en el aprendizaje.

Cuando un maestro propone una imagen fuerte y convincente de un concepto C, que se vuelve persistente, confirmada de continuos ejemplos, de experiencias, la imagen se transforma en *modelo intuitivo*.

Existe de hecho correspondencia directa entre la situación propuesta y el concepto matemático que se está utilizando; pero este modelo podría no ser aún aquel del concepto C que esperamos al interno del saber matemático.

Por tanto, entre los modelos, se reserva el nombre de “modelo intuitivo” a aquellos modelos que corresponden plenamente a las exigencias intuitivas y que tienen por lo tanto una aceptación inmediata fuerte (Fischbein, 1985, 1992).

Se habla también, en ocasiones, de modelos parásitas.

Un ejemplo. Habiendo aceptado el modelo intuitivo de multiplicación entre números naturales y habiéndolo erróneamente extendido a todas las multiplicaciones, modelo intuitivo reforzado de las imágenes esquemáticas (como lo ejemplificada líneas abajo), se forma un modelo parásito que se puede enunciar así: la multiplicación siempre crece, *debe* crecer siempre (Fischbein, 1985, 1992).

Análogo es el modelo parásito de la división. Sea que venga afrontada “por contención” o “por repartición”, si no se conoce un poco de Didáctica de la Matemática, se puede correr el riesgo de dar al estudiante un modelo intuitivo que terminará por producir un modelo parásito: en una división $A \div B$, el número B *debe* ser menor que el número A.

Didácticamente conviene dejar imágenes aún inestables, en espera de poder crear modelos adecuados y significativos lo más cercano posible al saber matemático que se quiere alcanzar.

Más “fuerte” es el modelo intuitivo, más difícil es desestabilizarlo para *acomodarlo* a una nueva imagen. En resumen, la imagen – *misconcepción* no debe convertirse en modelo dado que, por su misma naturaleza, se halla aún en espera de una definitiva consolidación.

Se trata entonces de no dar informaciones equivocadas o distorsionadas; no sólo no darlas de forma explícita, sino de hecho evitar que se formen implícitamente para impedir la formación de modelos parásitas. Una sólida competencia del profesor en Didáctica de la Matemática es, en este caso, de gran ayuda.

Veamos algunos ejemplos en detalle.

Ej. 1. El estudiante ha verificado por años que la operación de multiplicación “aumenta los valores de cada uno de los factores”; dicho en otras palabras, el producto es mayor que cada uno de los factores (12 es mucho más grande que 3 y que 4; o 60 es muchos más grande que 12

y que 5;...). También la imagen figural (de esquemas representativos y operacionales) ofrecida al alumno para hacer aceptable intuitivamente la operación de multiplicación confirma esta espera. De hecho, desde los primeros años de la escuela primaria, la imagen figural de la multiplicación, por ejemplo 4×4 , está dada por un arreglo de 4 filas de 4 objetos:

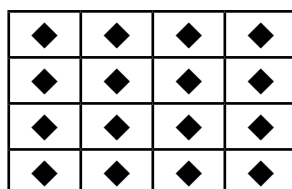


Figura 6. Arreglo figural del estudiante con 4 filas y 4 objetos

Es evidente que un arreglo hecho así refuerza *aquella* imagen del concepto. Pero después fatalmente llegará el día en el cual el alumno debe multiplicar aquel 4 no por 4, sino por 0.5 y entonces el modelo (ya formado) no funciona más y la supuesta regla general del argumento se derrumba; y tenemos entonces el conflicto (Fischbein, 1985, 1992).

A este punto *asimilar* la nueva situación para *acomodar* el modelo precedente a uno nuevo no es de hecho fácil (en cuanto que una característica del modelo, no presente en las imágenes, es precisamente su estabilidad).

Se crea entonces la necesidad didáctica de no hacer estable aquella imagen demasiado pronto, con el objetivo de poder ampliarla sucesivamente, en el tentativo de construir un modelo del concepto de multiplicación en forma óptima, que tenga en cuenta las sucesivas ampliaciones a los números no naturales.

No es un caso que muchos estudiantes de grados superiores (incluso universitario) se manifiestan maravillados de frente al hecho que entre las dos operaciones: 18×0.25 y $18 \div 0.25$ la primera da un resultado menor. Ellos conservan el modelo errado creado en la escuela elemental en base al cual “la multiplicación aumenta los valores” (y “la división los disminuye”).

Ej. 2. El estudiante ha dividido siempre un número grande por uno más pequeño; dicho en otras palabras, se ha hecho la imagen que el dividendo *debe* ser mayor que el divisor. El mismo modo en que la división es propuesta lleva a esto: se trata siempre de repartir varios objetos entre pocas cajas (división de repartición); se trata siempre de contenedores donde en cada uno se recogen diversos objetos (división de contenedores). Pero esto implica que, frente a un problema del tipo: «15 amigos se dividen 5 kilogramos de galletas ¿Cuánto le corresponde a cada uno?», el estudiante, incluso de la escuela superior (edad 14 – 19 años), tiende espontáneamente a realizar $15 \div 5$ [calculando no cuantas galletas le corresponden a cada amigo, sino «cuantos amigos le corresponde a cada kilo de galletas», como comentó con ironía un estudiante de 1º

Liceo Científico (edad 14 – 15 años), en el curso de la entrevista, cuando lo invité a reflexionar sobre su $15 \div 5$]. Entre la imagen intuitiva de la operación y aquella después construida en forma más refinada y profunda, existe un conflicto.

En situaciones en las cuales no hay un explícito llamado a una competencia cognitiva fuerte, el modelo intuitivo de la operación emerge siempre con energía. Se puede hacer la hipótesis de hecho que, incluso cuando el estudiante más avanzado se ha construido (con fatiga) un modelo correcto de un concepto C, modelo por demás cercano al saber matemático, en condiciones de normalidad el modelo intuitivo hace siempre su aparición, demostrando su persistencia.

Para comprender mejor, veamos la situación de 1° de Liceo citado líneas arriba. En situaciones de rutina, el estudiante “cae” en la trampa tendida por el mismo modelo intuitivo, pero cuando durante la entrevista lo llamo restituyéndole su texto, esta nueva situación provoca una atención diversa, más consciente, y una exigencia de hechos cognitivos más fuertes: a este punto no es más el modelo intuitivo a dominar la escena, sino aquel más refinado, elaborado cognitivamente. Precisamente la reacción divertida y de sorpresa del estudiante demuestra que él mismo se dio cuenta del hecho de haber usado un modelo intuitivo al puesto de uno más elaborado y crítico.

Ej. 3. Aún sobre la división. En el mismo artículo de Efraim Fischbein de 1985 citado poco antes, aparece otro test muy interesante que he utilizado con mucha frecuencia, particularmente en ocasión de encuentro con maestros.

Este se compone de hecho de dos ejercicios; he conservado el primero inalterado, mientras que el texto del segundo lo he modificado un poco, buscando que tuviera exactamente la misma forma literaria del primero:

PA. *Una botella de naranjada, que contiene 0.75 l, cuesta 2 dólares. ¿Cuál es el precio de 1 l?*

PB: *Una botella de naranjada, que contiene 2 l, cuesta 6 dólares. ¿Cuál es el precio de 1 l?*

Si se pide de resolver sólo PA, ocultando PB, se notará siempre entre los presentes un tiempo de ansia más o menos largo. Dado poco tiempo después PB y evidenciando el hecho que se trata del *mismo* problema, muchos son los que están dispuestos a admitir con sinceridad que, mientras el segundo problema se resuelve inmediatamente con la división $6 \div 2$, resolver el primero con la análoga división $2 \div 0.75$ crea un fuerte malestar.

Para entender esta situación me serviré de un apartado que escribe el mismo Fischbein (el cual comentaré más adelante): «En consecuencia se puede suponer que sean precisamente los números y las relaciones entre estos a bloquear o facilitar el reconocimiento de las operaciones de división como procedimiento resolutivo. Cada operación aritmética posee, además de su significado formal, también uno o más significados intuitivos. Los dos niveles pueden coincidir o no».

He intentado pedir a los profesores y a los estudiantes más avanzados como hubieran hecho para resolver PA. Algunos han confesado de haber utilizado 0.75 como $\frac{3}{4}$ y de haber procedido en el campo de las fracciones (no operando siempre en forma exitosa). Otros

admiten de haber resuelto PA. planteando la proporción $0.75:2 = 1:x$ y de haber después aplicado la conocida propiedad de estas para resolverla (casi siempre con éxito). Ahora, siguiendo el curso de la resolución de esta ecuación lineal para la incógnita x , se llega a un momento en el cual se *debe* hacer $2 \div 0.75$, es decir aparentemente la *misma operación* que, realizada directamente sobre los datos del problema, habría resuelto PA. en un segundo. Pero ¡no es la misma cosa!. Si es verdad, como indiscutiblemente lo es, que hay una fuerte resistencia en muchos de nosotros a realizar directamente $2 \div 0.75$ (a causa del contraste entre significado formal y significado intuitivo de la división), no existe este malestar al aplicar las reglas de las proporciones y seguir los *pasos de un algoritmo*, cuando se llega al momento final de pedirse de realizar *aparentemente la misma* operación. Aquí, como desde tiempo lo sabemos, se desencadena una cláusula del contrato didáctico, aquella de la *delega formal*: en un cierto sentido, no nos responsabilizamos directamente de hacer aquel paso, no es más una cuestión de elección, de decisión personal. A este punto estamos sólo siguiendo un procedimiento que consiste en una serie de pasajes automáticos, para los cuales hemos recibido consenso y delega, y para los cuales no debemos darnos, dentro de nosotros, una justificación paso – paso.

La cuestión, es necesario admitirlo, es de gran interés.

Ej. 4. La adición. Recojo una idea de Vergnaud (1982),⁴ que Fischbein considera un ejemplo más de la no coincidencia entre significado formal y significado intuitivo. Se trata de tres problemas aditivos, de una etapa, es decir que se resuelven con una sola operación. Los reporto completos, para comodidad del lector:

P.A Alrededor de una mesa hay 4 niñas y 7 niños. ¿Cuántos son en total?.

P.B Giovanni gastó 4 francos. Él tiene ahora en el bolsillo 7 francos. ¿Cuántos tenía antes?.

P.C Roberto ha jugado dos partidas. En la primera perdió 4 puntos, pero al final de la segunda partida se encontró con una ventaja de 7 puntos. ¿Qué sucedió en la segunda partida?.

Los tres problemas, es obvio, se resuelven con la misma operación $4+7$; pero estos tienen una porcentual de éxito muy diferente.

- P.A es resuelto correctamente ya en segundo de primaria (7 años): quienes lo resuelven con éxito llegan al 100%. Aquí, de otra parte, hay una perfecta coincidencia entre *significado formal* y *significado intuitivo*: la adición es la operación que resuelve problemas de unión entre conjuntos (que no tienen elementos en común). Pero casi ninguno de los mismos jóvenes resuelve P.B;
- P.B es resuelto, aunque con dificultad, en cuarto o quinto de primaria (a la edad de 9 – 10 años); digamos que, de todas formas, la solución correcta obtenida conscientemente alcanza un discreto porcentaje;

⁴ Se trata del reconocido estudio de tres problemas, que aparece citado en varios textos; se presentan y se discuten también en D'Amore (1993b).

- P.C es causa de fracaso casi que total. Aún en primero o segundo de la escuela media (a la edad de 11 o 12 años), P.C tiene una porcentual de solución correcta sólo de 25% aproximadamente, o incluso menos, de acuerdo con las pruebas de Vergnaud y de Fischbein.

Sin embargo, es obvio que aquí no se trata sólo de significados formales e intuitivos de la adición. Aquí se trata también, y quizás particularmente, de una dificultad de gestión “narrativa” del texto. [Y esto abriría la importante cuestión de la forma de presentación del texto de los problemas, para la cual remito a D’Amore (1993b); D’Amore, Franchini et al. (1995)].

Este tipo de pruebas, desde un punto de vista didáctico aplicativo, evidencia por lo menos que es falso el criterio que la dificultad en la resolución de problemas está en el aumentar el número de las operaciones en dicho proceso. Se puede verificar fácilmente que existen problemas que requieren de dos o más operaciones y sean más fáciles de resolver que P.B; P.C, además, aun teniendo una única operación, queda fuera del alcance de toda la escuela elemental...

La resistencia al uso de la adición en situaciones consideradas de no congruencia entre significado formal y significado intuitivo, son testimoniadas no sólo en la escuela primaria, sino también en toda la escuela media. Véase por ejemplo Billio et al. (1993), donde se analizan situaciones explícitamente denunciadas por los alumnos en oportunas entrevistas.

Ej. 5. La sustracción. La sustracción, además, *por su misma naturaleza*, presenta por lo menos dos diversos significados intuitivos, a cambio de un único significado formal, que se puede evidenciar recurriendo aún a dos problemas sugeridos por Fischbein (1985):

1. Si quitamos 7 canicas de un conjunto de 10 canicas, ¿Cuántas canicas quedarán?
2. Tengo 7 canicas, pero para jugar necesito 10. ¿Cuántas canicas debo agregar a las ya poseo para poder comenzar a jugar?

Es obvio que en los dos casos los problemas se resuelven con la sustracción 10-7; pero en el primer caso, aquello de *quitar* (como la llama Fischbein), la sustracción es intuitiva porque existe coincidencia entre el significado formal y el significado intuitivo; en el segundo caso parece ser más espontaneo el recurso de una estrategia aditiva del tipo: $7 + \text{''} = 10$, entendiendo de cualquier forma que aquel “” debe valer 3. De otra parte, es aditiva toda estrategia de “complemento a”, como, por ejemplo, la operación de dar el resto en un negocio: el negociante generalmente no hace la diferencia, sino que, paso a paso hace el complemento a partir de la cantidad que le están pagando hasta completar la cantidad versada. Tenemos por tanto entre los alumnos un cierto porcentaje de respuestas incorrectas; al puesto de la sustracción, hay quienes hacen la adición 7+10 o la 10+7 ligadas al hecho que esta la palabra *agregar* que sugiere el uso de la adición.

Existe un fuerte choque entre la operación ingenua y espontanea de contar que vendría de hecho a ser usada en una situación concreta (es decir el conteo: 7+1+1+1, con la respuesta 3

ligada al número de +1 necesarios para alcanzar el 10) y el significado formal de la sustracción. Si existiese una operación específica que exprese el número de aquellos +1 que permiten pasar de 7 a 10, probablemente la porcentual de éxito subiría notablemente; alguien podría decir que aquella operación existe y es precisamente la sustracción expresada como $10-7$; pero las pruebas hechas y las consideraciones efectuadas hasta ahora muestran que *no* existe este significado intuitivo con el cual los estudiantes construyen en su cognitivo la sustracción.

Y tanto sería lo que habría de decir acerca de una situación aún más complicada ligada a los *dos significados intuitivos* de la división, de la cual apenas he hecho referencia antes, aquel de repartición y aquel de contención; ambos corresponden a un único *significado formal*. En más de una ocasión he encontrado maestros de primaria que me confesaban de tratarlos separadamente, como si fueran dos operaciones diversas, «para evitar complicaciones en el alumno».

Modelos internos y externos: la “traducción”.

Llegar a conocer el modelo mental que un individuo se hace de un concepto es una ardua empresa si no de hecho imposible; si el individuo quiere comentar a sí mismo su propio modelo mental, por lo general lo hace en lengua interna que parece ser absolutamente personal y sin ningún rigor lexical. Pero si intenta comunicar al externo el propio modelo, entonces *debe* “traducirlo” en algo de externo [cualquiera que sea el lenguaje en el cual comunicará el resultado: verbal (oral o escrito), no verbal (figural, mímico, gestual,...)].

Por tanto, un modelo externo de un concepto es la propuesta personal consciente en una forma cualquiera de lenguaje, propuesta hecha por necesidad o por el deseo de comunicar.

He usado el verbo “traducir” porque se trata de una verdadera y propia traducción y gran parte de la investigación actual se ocupa de las formas como se hace tal traducción; también se estudia la influencia que tienen factores como personalidad, estilo cognitivo, ambiente etc. sobre algunas características de esta misma traducción (por ejemplo, la lengua interna y el conocimiento tácito).

Para la Didáctica de la Matemática, este tipo de temas tiene gran interés, dado que toda la comunicación matemática se da por modelos externos. Dicho en otras palabras, no sabremos nunca cual es el modelo mental que Pedrito se ha hecho, por ejemplo, de las alturas de un triángulo. Si incluso le pidiésemos, no obtendríamos más que el resultado de dicha traducción de la cual hablé antes; después de esto, volver a traducir en sentido inverso para salir de nuevo al modelo mental de Pedrito es imposible... En el curso de conversaciones o de interrogaciones, a causa de algunas cláusulas del contrato didáctico, Pedrito buscará dar modelos externos cercanos a aquellos que considera están esperados por el maestro, más que a su modelo interno. Pero, a través de técnicas de indagación por demás sofisticadas, se logra hacer que el estudiante se desprenda del vínculo de la relación con el maestro – evaluador y de la imagen del aula como

lugar de búsqueda de consenso. Si el estudiante acepta expresarse en un lenguaje natural, por ejemplo, como si tuviera que dirigirse a un niño más pequeño para explicarle que son las alturas de un triángulo, entonces sí tendríamos informaciones que, sin pensar ingenuamente que son la descripción exacta del modelo mental (interno), son por lo menos personales y profundas.

A propósito del ejemplo, *no* elegido acaso, veamos como una niña de 2° media (edad 12 – 13 años), fingiéndose adulta y mamá, explica a su supuesto hijo de 7 años por qué el triángulo tiene tres alturas:

Simona:

Hijo mío, la geometría tu no la conoces, pero quiero explicarte que significa altura. Como tú, yo y papá tenemos una altura, que se mide de la cabeza a los pies, también los triángulos tienen una, pero la de ellos se mide del vértice que es un puntico hasta la base que son como nuestros pies. Pero dado que ellos tienen 3 punticos (vértices), tienen tres alturas porque tienen tres pares de pies. Y dado que nosotros tenemos una sola cabeza y un sólo par de pies, tenemos una sola altura.

Ahora, no está dicho que el modelo mental de Simona sea aquel que ella ha descrito muy bien con palabras, pero lo cierto es que para obtener este tipo de modelo externo en forma verbal escrita se requieren atenciones pedagógicas notables y además nos da variadas informaciones sobre como Simona se ha imaginado una solución cognitiva para aceptar el modelo mental (D'Amore, Sandri, 1996). [Sobre la producción de estos TEPs autónomos, textos escritos espontáneamente, por parte de los estudiantes, véase (D'Amore, Maier, 2002)].

Se trata de un argumento discutido, fuertemente debatido y hasta el momento en continua evolución.

El triángulo: maestro, alumno, saber

Toda la Escuela Francesa (y, particularmente, Brousseau) considera el fenómeno enseñanza – aprendizaje de la Matemática desde un punto de vista *sistémico* y no como el estudio separado de cada uno de sus componentes. En Brousseau son fundamentales maestro y alumno, con la relación “saber” que los liga, al interno de un *milieu*, medio, ambiente, en el cual ellos se encuentran a actuar (D'Amore, 1999b, p. 26).

Pero, para lo que deseo evidenciar en este Capítulo, me serviré de una simplificación que aparece en trabajos de Yves Chevallard a partir de 1982; en estos viene propuesto al estudio un modelo del *sistema didáctico*, formado por sólo tres componentes: maestro, alumno y saber (académico, oficial, universitario) que se denomina: *triángulo de la didáctica*.

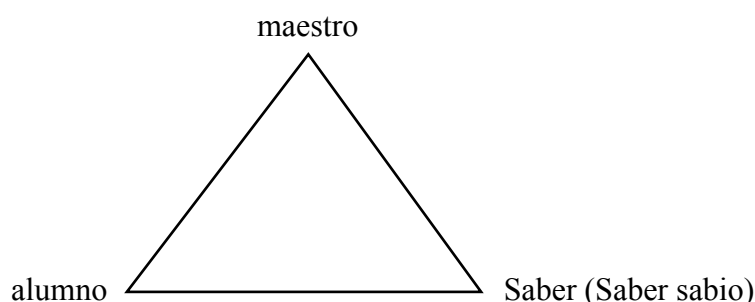


Figura 7. Simplificación del triángulo de la didáctica

Es claro que el maestro se encuentra inserto en una serie de relaciones extremadamente delicadas. De una parte, debe hacer una *transposición didáctica del Saber* (que surge de la investigación) *al saber enseñado* (aquel de la práctica en aula, desde el punto de vista de la enseñanza) (Chevallard, 1985, p. 76).

En realidad, el pasaje es mucho más complejo porque se pasa del *Saber matemático* al *saber de enseñar* al *saber enseñado*. (En consecuencia, el currículo puede ser examinado sobre la base de estas transformaciones; y de esta forma también la evaluación: Fandiño Pinilla, 2002, p. 22).

La transposición didáctica consiste por tanto en extraer un elemento del saber de su contexto (universitario, social etc.) para readaptarlo en el contexto siempre individual, siempre único, de la propia aula.

En este trabajo el maestro no es nunca un individuo aislado. Es de hecho el colectivo, la institución que objetiva y define en su especificidad el saber escolar, sus métodos y su racionalidad.

La transposición didáctica produce entonces un cierto número de efectos: simplificación y desdogmatización, creación de artefactos o producción de objetos totalmente nuevos.

En efecto, la escuela nunca ha enseñado saberes puros sino *contenidos de enseñanza*, algo que existe sólo al interno de la escuela y que no tiene sólitamente una inmediata correspondencia ni con la esfera de producción ni con aquella de la cultura. Desde el momento en el cual un dominio del saber, un concepto, entra en un programa escolar, sufre una transformación total, es desnaturalizado para encontrar un nuevo estatus, entra en otra lógica, en otra racionalidad (Fandiño Pinilla, 2002, p. 25).

El concepto de *transposición didáctica* parece ser también para el futuro de notable importancia entendida como un trabajo de adaptación, de transformación del saber en objeto de enseñanza, en función, como lo he dicho, del lugar, del público y de las finalidades didácticas que nos proponemos.

De otra parte, pero, el maestro debe tener presente el sistema didáctico y el ambiente social y cultural, es decir la *noosfera* en la cual él debe actuar.

Por noosfera se puede entender el lugar de los debates de ideas significativas sobre la enseñanza, las finalidades de la escuela, los objetivos de formación, las expectativas de la sociedad en lo referente a la escuela y a la cultura (por ejemplo los programas del ministerio); la noosfera es el intermediario entre sistema escolar (y las decisiones del maestro) y el ambiente social más general (externo a la escuela); se podría pensar como «la capa externa que contiene todas las personas que en la sociedad piensan en los contenidos y a las formas de enseñanza» (Godino, 1993, p. 77).

Existe también una relación entre noosfera y contrato didáctico, en cuanto que sobre algunas cláusulas del cd tiene ciertamente influencia directa el ambiente en el cual el maestro se encuentra a actuar.

Sobre este importante argumento, me limito aquí a hacer sólo esta breve referencia. Sin embargo, en D'Amore, Fandiño Pinilla (2002, p.15) se hace una profundización del estudio del triángulo que recupera la aproximación al *milieu*, como era en su origen.

Obstáculos.

No es fácil formarse conceptos; esto porque cada concepto, incluso en apariencia simple, esta circundado de un entorno fluctuante y complejo de representaciones asociadas que comportan múltiples niveles de formulación y de integración del concepto (Giordan, De Vecchi, 1987, p. 90).

Por tanto, el primer problema es aquel de “limpiar” el concepto de este manto que parece esconder su significado íntimo.

Y después hay que tener presente los *obstáculos* que se interponen al aprendizaje, propuestos por primera vez por Guy Brousseau ya a salir de sus trabajos de 1968, y en otros de 1972 y 1976 (Brousseau, 1972a, 1976), hechos célebres por su trabajo específico de 1983 y del muy citado (Brousseau, 1986) [pero tal concepto es ya presente en estudios filosóficos de Gastón Bachelard (1938), aunque limitados únicamente a las ciencias naturales].

Veamos de que se trata: “obstáculo” es una idea que, al momento de la formación de un concepto, ha sido eficaz para afrontar problemas precedentes (incluso sólo cognitivos), pero que se revela ineficaz cuando se intenta aplicar a un problema nuevo. Visto el éxito obtenido (es más: a mayor razón a causa de este éxito), se tiende a conservar la idea ya adquirida y comprobada y, no obstante, el no éxito, se la intenta salvar; pero este hecho termina con ser una barrera para sucesivos aprendizajes.

Se distinguen entonces tres tipos de obstáculos:

- de naturaleza ontogenética
- de naturaleza didáctica
- de naturaleza epistemológica

Los examinaré en orden.

Cada sujeto que aprende desarrolla capacidades y conocimientos adaptados a su edad mental (que puede ser diversa de la edad cronológica), por tanto adaptados a medios y objetivos de dicha edad: respecto a la adquisición de ciertos conceptos, estas capacidades y conocimientos pueden ser insuficientes respecto del proyecto didáctico por parte del maestro y pueden constituir por tanto obstáculos de *naturaleza ontogenética* (el alumno podría tener limitaciones neurofisiológicas incluso sólo debidas a su edad cronológica).

Por ejemplo, se manifiesta inadecuado todo tentativo de introducir demostraciones en segundo o tercero de la educación media (edad de los alumnos 12 – 14 años), al momento de presentar el teorema de Pitágoras; esto obliga a los maestros a sustituir la “demostración” con un “prueba” a veces concreta. Se considera que el “fracaso” este ligado a la edad de los alumnos y a su inmadurez crítica.

Un ejemplo más; se revela no exitoso intentar de introducir en la escuela primaria el conectivo lógico de la “implicación”: si A entonces B o A implica B, por el mismo motivo.

Todo docente elige un proyecto, un currículo, un método, interpreta en forma personal la transposición didáctica, según sus convicciones ya sean científicas como didácticas: él cree en aquella elección y la propone a la clase porque la considera eficaz; pero aquello que en verdad es eficaz para algún estudiante, no está dicho que lo sea para otros. Para aquellos *otros*, la elección de *aquel* proyecto se convierte en un *obstáculo didáctico*.

Un ejemplo de obstáculo didáctico es la presentación que hacen algunos maestros de escuela primaria al momento de presentar los objetos geométricos *actualmente infinitos*: el segmento como infinidad de puntos, la recta como figura ilimitada. El modelo aún difuso en las escuelas es aquel del segmento como un collar de perlas (sucesión de puntos) que, por su inmediatez, viene inmediatamente aceptado por los estudiantes y se convierte en un modelo intuitivo; esto constituye un evidente obstáculo didáctico en el momento en el cual se debe introducir la idea de densidad, en la misma escuela primaria y más aún en la escuela media, y cuando se debe introducir la idea de continuidad en la escuela superior. Investigaciones cuidadosas han evidenciado ampliamente que los estudiantes maduros (último año de la escuela secundaria y primeros años de la universidad) no logran dominar el concepto de continuidad precisamente a causa del modelo intuitivo persistente del segmento como un collar de perlas (Arrigo, D’Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2004). En cuanto a la recta como figura ilimitada, junto con el conteo prolongado de números naturales, parecen proporcionar al estudiante la capacidad de ver el infinito sólo *en potencia* y no *en acto*, lo que crea graves obstáculos didácticos en los cursos siguientes.

Todo argumento de carácter matemático tiene su propio estatuto epistemológico que depende de su historia en la evolución al interno de la Matemática, de su aceptación crítica en el ámbito

de la Matemática, de las reservas que le son propias, del lenguaje en el cual se expresa o que requiere para ser comunicado.

Cuando en la Historia de la evolución de un concepto se individua una no continuidad, una ruptura, cambios radicales de concepción, se supone entonces que dicho concepto en su aprendizaje revela obstáculos de carácter epistemológico; esto se manifiesta, por ejemplo, en errores recurrentes y típicos de varios alumnos, en diversas clases, estables en los años.

Por ejemplo, el infinito matemático constituye ciertamente un obstáculo epistemológico; baste recordar su historia al interno de la Matemática para revelar las luchas, discusiones, rupturas que han determinado su aceptación desde el momento en que Zenón de Elea (V, VI sec. a.C.) introduce sus célebres paradojas, hasta la condena de Aristóteles de Stagira (III sec. a. C.) del infinito actual y siguiendo la historia hasta la completa aceptación, gracias a la obra de Georg Cantor (entre los siglos XIX y XX) (Arrigo, D'Amore, 1992). Desde el punto de vista didáctico, este hecho ha sido ampliamente estudiado en el contexto internacional (D'Amore, 1996; Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

El cero constituye también un obstáculo epistemológico; este era ausente en las culturas antiguas, incluidos Griegos y Romanos, y aparece sólo en VI siglo d. C. en India; fue divulgado gracias a las obras del mundo árabe alrededor del IX sec. d. C.; pero su presencia en obras europeas de los siglos XIII y XIV fue obstaculizada y causa de furibundas luchas. Una plena aceptación del cero como verdadero y propio número fue tardía y se puede hacer salir al siglo XVI. Desde el punto de vista didáctico, es bien conocido que el estudiante ve el cero como número “especial” y difícilmente lo domina.

Los números enteros, aquellos que llevan un signo, hicieron su aparición sólo en el siglo VI d. C. en India y tienen una historia análoga a aquella del cero pero aún más obstaculizada y tardía. Inútil recordar cómo, desde el punto de vista didáctico, son muchas las dificultades, de parte de los estudiantes, para darse razón del funcionamiento de tales números. Ejemplo clásico es la “extrañeza” del hecho que el producto de dos números negativos es un número positivo.

Resumiendo: el obstáculo ontogenético está ligado al estudiante, a su inmadurez (desde tantos puntos de vista); el didáctico a la elección didáctica del docente; el epistemológico a la naturaleza misma del argumento.

¿Cuándo y en ocasión de cuáles ideas matemáticas es probable que se tenga un obstáculo epistemológico?

- Se tiene casi siempre un obstáculo epistemológico a propósito de aquellas ideas para las cuales en un análisis histórico de estas se reconoce una fractura, un pasaje brusco, una no continuidad en la evolución histórico - crítica de la misma idea;
- se tiene un obstáculo epistemológico a propósito de una idea cuando el mismo error se verifica como recurrente más o menos en los mismos términos alrededor de dicha idea.

La búsqueda de los obstáculos va entonces hecha contemporáneamente, y este ligamen es muy interesante:

- en la escuela, en la práctica didáctica;
- en el estudio de la historia de la Matemática,
- uniendo una investigación con la otra.

Es de gran interés la posición según la cual, como escribe Federigo Enriques (1942),⁵ el error «no pertenece ni a la capacidad lógica ni a la intuición, [sino] se introduce en el momento delicado de su enlace».

El error, por tanto, no es necesariamente sólo fruto de ignorancia, sino por el contrario podría ser el resultado de un conocimiento precedente, un conocimiento que ha tenido éxito, que ha dado resultados positivos, pero que no es suficiente en hechos más contingentes o generales.

Por tanto, no se trata siempre de errores de origen desconocida, impredecible, sino de la evidencia de obstáculos en el sentido citado antes. Estas consideraciones han llevado la investigación en Didáctica de la Matemática a reevaluar en forma muy diversa de la praxis usual el error y su papel.

Este tipo de estudio es de gran importancia y ha dado ya interesantes resultados, que aquí no puedo sino mencionar. Hay que aclarar que la partición de los obstáculos en tres tipologías es pertinente por motivos analíticos, pero no siempre responde a la verdad en la práctica didáctica; existen casos en los cuales los obstáculos didácticos se mezclan con los obstáculos epistemológicos (para un ejemplo relativo a “Área y perímetro”, véase: D’Amore, Fandiño Pinilla, 2005, p. 24; sobre ejemplos relativos a las “Fracciones”, véase: Fandiño Pinilla, 2005, p. 19).

Notas

El texto de este artículo es el resultado de una reelaboración de:

D’Amore B. (2004). Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. En: AA. VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l’Éducation nationale de la Formation professionnelle et des Sports. [65-98].

D’Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México DF, México: Reverté-Relime. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla.

⁵ Para encontrar en la literatura este artículo, es necesario buscar como autor Adriano Giovannini, el seudónimo que Enriques se vió obligado a usar bajo el régimen fascista, para huir de la persecución racial y sobretodo para poder continuar a publicar, hecho que le era en ese entonces prohibido. Se tiene entonces la citación (Giovannini, 1942).

Referencias

- Adda, J. (1987). Erreurs provoquées par la représentation. Atti CIEAEM. Sherbrooke: Univ. de Sherbrooke.
- Agli, F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milán: Juvenilia.
- Arrigo, G. & D'Amore B. (1992). *Infiniti*. Milán: Franco Angeli.
- Arrigo, G. & D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 1999, 465-494. [En versión inglesa: "I see it but I don't believe it...". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Bélgica). XXXVI, 1, 1999, 93-120; un resumen del texto inglés aparece en: *Proceedings of the 2nd Mediteranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, 371-383; otro resumen del texto inglés aparece en: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. La versión en idioma español: "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*. México DF. 11, 1, 5-24].
- Arrigo, G. & D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", segunda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57. [Un amplio resumen en idioma español en la revista *Educación matemática* (2004)].
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: Vrin.
- Billio, R., Bortot, S., Caccamo, I., Giampieretti, M., Lorenzoni, C., Rubino, R. & Tripodi, M. (1993). Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 368-386.
- Brousseau, G. (1972a). Les processus de mathématisation. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public*. Numéro Spécial: *La Mathématique à l'école élémentaire*. Este texto fue publicado en las Actas del Congreso de Clermont Ferrand de 1970.
- Brousseau, G. (1972b). Vers un enseignement des probabilités à l'école élémentaire. *Cahier de l'IREM de Bordeaux*. 11.

- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes Rendus de la XXVIIIe Rencontre de la CIEAEM*. Louvain la Neuve. 101-117.
- Brousseau, G. (1983). Obstacles Epistémologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. vol. 4.2, 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- D'Amore, B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia, dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. *Actas del I Congreso Internacional sobre Investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática*. Valencia 1987, 324-325.
- D'Amore, B. (1993a). Il problema del pastore. *La vita scolastica*. 2, 14-16.
- D'Amore, B. (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della Matematica nell'attività di problem solving*. Milán: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. en idioma español: Madrid: Síntesis, 1996].
- D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. Un fertile campo per la ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335. [En idioma español: El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*. 36, 1996, 341-360].
- D'Amore, B. (1998b). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*. 1, 728 [texto bilingüe, italiano e inglés]. [En idioma español: *Uno*, 15, 1998, 63-76].
- D'Amore, B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276. Un amplio resumen de este artículo ha sido publicado en idioma español en: *Resúmenes de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Universidad Autónoma de Santo Domingo, Santo Domingo, República Dominicana, 12-16 julio 1999, 27. Traducción completa en idioma español: La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Relime*. México D.F., México. vol. 3, 3, 2000, 321-338].

- D'Amore, B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En español (2006): *Didáctica de la Matemática*. Bolgotà: Magisterio].
- D'Amore, B. (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*. México D.F., México. 12, 1, 2000, 39-50.
- D'Amore, B. (2000b). Problems of Representing Concepts in the Learning of Mathematics. En: *Proceedings of the International Conference: Mathematics for living*. Amman, Jordania, noviembre 18-23 2000, 1-5.
- D'Amore, B. (2000c). Che cosa vuol dire apprendere un concetto matematico. En: *Atti del Convegno Internazionale "Matematica 2000"*, Bellinzona (Suiza), 28-29 agosto 2000, número especial 41, *Bollettino dei docenti di matematica*. 2000, 87-92.
- D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 31-56. [En idioma español: Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. Barcelona, 27, 2001, 51-76].
- D'Amore, B. (2001b). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001c). Problemas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a la vuelta del milenio. *Actas del III Simposio Internacional de Educación Matemática*. Chivilcoy (Argentina), 1-4 mayo 2001. 1-14. Texto de la conferencia inaugural en calidad de Presidente honorario.
- D'Amore, B. (2001d). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [En idioma francés: Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. XXXVIII, 2, 2001, 143-168. En idioma español: Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivísticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106, 2004.]
- D'Amore, B. (2002a). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*. 4, octubre 2002, 56-82. [En idioma alemán: Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. En: AA. VV.

- (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éducation nationale de la Formation professionnelle et des Sports. ISBN 2 – 87995 – 108 –9. 65-98].
- D'Amore, B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 11, 63-71.
- D'Amore, B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou la raison de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. Canada. 23(1).
- D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica della scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30. [Versión en idioma español: D'Amore B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. [Cádiz, España]. 60, 20, 3, 413-434].
- D'Amore, B. (2005). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. [Existe una versión en idioma español: *Números*. [Tenerife, España]. 61, 3-18].
- D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estevéz, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rojas Garzón, P.J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J.H. & Sbaragli S. (2004). Il “senso dell'infinito”. *La matematica e la sua didattica*. 4, 46-83.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia (Chypre), Intercollege Press Ed. Actas del “Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio —6 julio 2001. 111-130.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*. México DF, México, vol. 14, 1, 48-61.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2003). La formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. En: Fandiño Pinilla (ed.) (2003). *Formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. Una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. [En español: *Epsilon*. (Cádiz, España). 58, 20, 1, 25-43.

- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2.
- D'Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Matteucci, A., Pascucci, N. & Sandri, P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146.
- D'Amore, B. & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La Matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. [En idioma español: Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*. 32, 1997, 26-32. En idioma inglés: The Didactic Contract, Mental models and Intuitive models in the resolution of standard scholastic problems. En: Gagatsis A. (ed.) (1999). A multidimensional approach to learning in mathematics and science. Nicosia (Chypre): Intercollege Press. 3-24. En lengua francesa: Contrat didactique, modèles mentaux et modèles intuitifs dans la résolution de problèmes scolaire standard. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. XXXV, 1, 1999, 95-118].
- D'Amore, B. & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 144-189. [En lengua española: Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Epsilon* (Cádiz, España). 18(2), 53, 243-262, 2003].
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 348-353. [Reestampado en: Gagatsis A. (ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II, Thessaloniki. En griego 247-252, en francés 579-584].
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A. 3. 223-246. [En idioma español: Imagina que eres... Indagación sobre el uso de la lengua común en contexto matemático en la escuela media. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá, Colombia. 4, 3, 1999, 207-231].
- D'Amore, B. & Sandri, P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18.
- D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang. [Trad. en idioma español: *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle (Colombia), 1999].
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en didactique des mathématiques*. 16, 3, 349-382.
- Duval, R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.
- Fandiño Pinilla, M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M.I. (ed.) (2003). *Formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. Una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
- Filloux, J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné*. Paris: Dunod.
- Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 122-132.
- Fischbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. En: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. (D'Amore B. ed.). Bologna: Pitagora. 1-24.
- Giovannini, A. (Enriques, F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*. IV, XXII.
- Giordan, A. & De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- Godino, J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*. 2, 2, 69-79.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*. 22, 2.3, 237-284.
- Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques*. 14, 3, 325-355.
- Godino, J. & Batanero, C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. En: Malara

N.A. (ed.) (1998). *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla Julio 1996*. Modena: CNR-MURST-University of Modena. 13-22.

IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*. 323, 235-243.

Moreno Armella, L. (1999). Epistemologia ed Educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4359.

Peano, G. (1924). *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. Torino: Paravia.

Radford, L. (2002a). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge [1]. *For the Learning of Mathematics*. 22, 2, 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*. 5, 1, 37-70.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118.

Sbaragli, S. (1999). Una esperienza sulla ipotesi "intra-, inter-, trans-figurale" di Piaget e Garcia nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica*. 3, 274-312.

Sbaragli, S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. I parte: 26 A, 2, 155-186; II parte: 26 A, 5, 573-588.

Sbaragli, S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. Tesis de doctorado. Universidad de Bratislava. En italiano y inglés: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*. 1.

Schoenfeld, A.H. (1987a). What's all the fuss about metacognition? En: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Ass. 189-215.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En: Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (eds.) (1982). *Addition and subtraction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Ass. Inc. 39-59.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 19, 133-169.

Vygotski, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge: MIT Press. Se trata de un resumen de la ed. original en idioma ruso, colección de artículos publicados en Moscú en 1956.