SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE PLANTAS CAPACITADAS DE FUENTE ÚNICA EN DOS ETAPAS MEDIANTE PLANOS DE CORTE FENCHEL.

SOLVING THE PROBLEM OF LOCATING SINGLE-SOURCE CAPACITATED PLANTS IN TWO STAGES BY MEANS OF FENCHEL CUTTING PLANS

Jenny Margarita Rojas Jerónimo[1], **Billy Santos Toribio Aranda**[2]
Escuela de Ingeniería Civil. Universidad César Vallejo
[1]jmrojas00@yahoo.es
[2]billy_trb@hotmail.com

Recibido: 20 setiembre 2018 - Aceptado: 22 noviembre 2018

DOI: https://doi.org/10.18050/cientifi-k.v7i1.2125

RESUMEN

En el presente trabajo, aplicamos la metodología de los planos de corte Fenchel para resolver el problema de Localización de Plantas Capacitadas de fuente única en dos etapas (**TSCFL**). Las desigualdades Fenchel describen la envolvente convexa de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ sin conocer explícitamente la estructura. La relajación Fenchel es una relajación lineal, se obtiene al agregar las desigualdades Fenchel más violadas obtenidas como solución del problema de separación asociado al problema primal. El valor de la relajación Fenchel constituye una cota inferior fuerte para el problema de localización. Simultáneamente se aplica una heurística basada en la relajación Fenchel para obtener una solución factible la cual constituye una cota superior. Ambas cotas se integran al algoritmo de Ramificación y Acotación basado en programación lineal para obtener el óptimo global. Asimismo, los cortes Fenchel presentan eficientes propiedades computacionales.

Palabras clave: Envolvente convexa, Localización de plantas, Programación lineal Heurística.

ABSTRACT

In the present study, we applied the Fenchel cutting plans methodology to solve the problem of Locating Single-Source Capacitated Plants in two stages (TSCFL). Fenchel inequalities describe the convex envelope of an X⊂R^n set without explicitly knowing the structure. Fenchel relaxation is a linear relaxation obtained by adding the most violated Fenchel inequalities obtained as a solution to the separation problem associated with the primal problem. The value of the Fenchel relaxation constitutes a strong lower dimension for the localization problem. Simultaneously, a heuristic based on the Fenchel relaxation is applied to obtain a feasible solution which constitutes a higher dimension. Both dimensions are integrated to the Ramification and Dimensioning algorithm based on linear programming to obtain the overall optimum. Likewise, Fenchel cuts present efficient computational properties.

Keywords: Convex envelope, Plant location, Heuristic linear programming.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad el desarrollo tecnológico está asociado al comercial y al económico, la distribución de bienes es un problema que está adquiriendo una creciente importancia. Muchos sistemas de distribución tienen una estructura de dos etapas y la toma de decisiones referente al número, tamaño y localización de locales, es algo que afecta a la nueva actividad comercial. En el diseño del sistema de distribución de los locales centrales o plantas que se encargan de suministrar los productos de consumo a los locales intermediarios o depósitos donde se distribuyen los productos a los clientes, pueden influir muchos factores, pero el más importante es decidir el número y la localización de los locales intermediarios o depósitos. Esta decisión puede obtenerse resolviendo el modelo de un problema de localización de plantas capacitadas en dos etapas: TSCFL.

El problema consiste en determinar la localización óptima de los depósitos, para poder suministrar la demanda requerida por los clientes, obtener una asignación óptima de los clientes a los depósitos y determinar el flujo óptimo de los productos de las plantas a los depósitos, más el costo de transporte de los productos desde cada centro de distribución disponible hasta los clientes, más el costo fijo de mantenimiento asociado a cada depósito.

Geoffrion y Grave (1974) usaron el método de descomposición de Benders para resolver un problema de localización de depósitos en dos etapas para la distribución de múltiples productos, considerando que sólo un deposito debe satisfacer toda la demanda de un cliente y además debe ser posible la cantidad suministrada de cada producto desde la planta origen. En 1991 Hindi y Basta usaron el algoritmo Branch-and Bound basado en relajación lineal, para resolver un problema de distribución de múltiples productos similar al que presentaron Geoffrion y Graves pero consideraron que cada cliente podía ser abastecido por más de un depósito. Tcha y Lee (1984) extienden el método de Erlenkotter's para problemas de localización de plantas simples, a un método de Branch and Bound para problemas de localización no-capacitado de múltiples etapas.

En cuanto a estudios poliédricos Aardal y Hoesel (1996) proponen nuevas desigualdades válidas para el problema de localización no-capacitado de dos etapas. Aardal y Pochet (1995) también realizaron estudios sobre planos de cortes para problemas de localización de una y dos etapas.

En un sistema real de distribución este tipo de problemas suele tener miles de clientes y cientos de locales de distribución por lo que es un problema difícil de resolver y la mayoría de métodos consiste en determinar cotas fuertes en un tiempo eficiente y que se pueden integrar en un algoritmo enumerativo para obtener un óptimo global. En este sentido se pueden ver los trabajos de Klose (1995, 1999 y 2000).

II. MATERIAL Y MÉTODOS

El desarrollo del presente trabajo se ha realizado usando como material de estudio los artículos descritos en las referencias bibliográficas. Algunas publicaciones en internet basado en los planos de corte. En cuanto a la metodología usada para el desarrollo del presente trabajo, se ha realizado la discusión y el análisis del método de los planos de corte Fenchel para resolver el Problema de Localización de Plantas Capacitadas de Fuente Única en dos etapas.

III. RESULTADOS

En el presente trabajo se ha considerado el estudio de los cortes Fenchel para resolver el problema de Localización de Plantas Capacitadas de Fuente Única en dos etapas. Usando esta metodología se llega a los siguientes resultados.

- Las relajaciones Fenchel proporcionan cotas inferiores.
- El teorema al final del trabajo garantiza la existencia de las cotas inferiores usando relajaciones Fenchel.
- La relajación Fenchel proporciona una heurística para una solución factible lo que constituye una cota superior.

IV. DISCUSIÓN

Formulación y Notación

Sea $I = \{1,..,m\}$ el conjunto de plantas, $J = \{1,...,n\}$ conjunto de las posibles ubicaciones de los depósitos, $K = \{1,...,k\}$ el conjunto de clientes o puntos de demanda. El modelo matemático del problema TSCFL es:

$$mín \quad \sum_i \sum_j t_{ij} v_{ij} + \sum_k \sum_j c_{kj} y_{kj} + \sum_j f_j x_j \qquad (1)$$

$$Sujeto\ a: \quad \sum_j y_{kj} = 1 \quad \forall\, k \in K \qquad (2)$$

$$\sum_{k \in K} d_k y_{kj} \leq u_j x_j \quad \forall\, j \in J \qquad (3)$$

$$y_{kj} - x_j \leq 0 \quad \forall\, k \in K, j \in J \qquad (4)$$

$$\sum_j u_j x_j \geq \sum_k d_k \qquad (5)$$

$$\sum_j v_{ij} \leq p_i \quad \forall\, i \in I \qquad (6)$$

$$\sum_i v_{ij} = \sum_k d_k\, y_{kj} \quad \forall\, j \in J \qquad (7)$$

$$v_{ij} - p_i x_j \leq 0 \quad \forall\, i \in I, j \in J \qquad (8)$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i \in I, j \in J \qquad (9)$$

$$y_{kj} \in \{0,1\} \quad \forall\, k \in K, j \in N \qquad (10)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad (11)$$

Donde, la función objetivo (1)representa la minimización del costo total, c_{kj} denota el costo de abastecer al cliente $k \in K$ del depósito $j \in J$, f_j denota el costo fijo de mantener operativo el depósito *j*, u_j denota la capacidad de producción de la planta y la capacidad del depósito *k*, d_k denota la demanda del cliente *k*. Las variables de decisión del problema TSCFL son:

$$y_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si el deposito } \boldsymbol{j} \text{ sirve al cliente } k \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el deposito } \boldsymbol{j} \text{ esta abierto} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \text{flujo de la planta } \boldsymbol{i} \text{ al deposito } \boldsymbol{j}.$$

Las restricciones (2) son las de demanda o restricciones del cliente, con ellas se asegura que cada punto de demanda *k, sea* totalmente abastecido o suministrado. La restricción (3) son las de capacidad de los depósitos y con esta restricción se asegura que los requerimientos de todos los clientes o puntos de demanda servidos por el depósito *j* no pueden ser mayores que la capacidad del depósito u_j.Las restricciones (4) y (5) son redundantes de tipo VUB (Variable de cota superior) y de demanda total, fortalecen la formulación de la relajación lineal del problema y además las de demanda total se usarán para el desarrollo de la heurística. Las restricciones (6) son las de suministro o capacidades de las plantas. Las restricciones (7) las de conservación de flujo. Las restricciones (8) son redundantes de tipo VUB denominadas de flujo máximo y fortalecen la formulación de la relajación lineal. La restricción (9) es la de flujo y es continua.

Si denotamos las restricciones (2) por (D), las (3) por (C), las (4) por (B), las (5) por (T), las (6) por

(S), las (7) por (CF), las restricciones redundantes (8) por (FM), la (9) por (F) y las restricciones de integralidad (10) por (I_X) y (11) por (I_Y). Entonces la formulación del problema es:

$$mín \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$\text{Sujeto a:} \quad (v, y, x) \in S$$

$$\text{Donde } S = P\big[(D),(C),(B),(T),(S),(CF),(FM),(F),(I_y),(I_x)\big].$$

En Cornuejols[8] se establece que si (S_1), (S_2),...,(S_k) denotan a k conjuntos de restricciones, $P(S_1,...,S_K)$ representa la región factible definida por las restricciones (S_1), (S_2),...,(S_k) y conv(S_1,...,S_k,I) es la envolvente convexa de la región factible definida por (S_1), (S_2),...,(S_k),I. Si el conjunto S se relaja completamente la cota que se obtiene se denotará por Z^s y si las restricciones son de la forma lagrangeana la notación de la cota es $Z_{s.}$ Por lo tanto, dado un problema de programación lineal entera general

$$(PE) \qquad \{\min \quad cx \quad , \qquad Sujeto\ a{:}\ \ x \in S\}$$

S=P(S_1,...,S_k) es el espacio factible. El de las cotas de acuerdo a la relajación completa y lagrangeana respectivamente se obtiene de resolver: Z^{si}= mín{cx: $x \in S \setminus P(S_i)$} y Z_{si}= mín{cx: $x \in P(S_i) \cap \text{conv}(S \setminus P(S_i))$}. Si X es una estructura especial de (P) que contiene las restricciones de integralidad, $\overline{X}$ denota la relajación lineal de X. La expresión v(P) denota el valor óptimo de (PE) y si (LP(*)) es una relajación de (PE), entonces v(LP(*)) es el valor óptimo de dicha relajación.

Relajación lagrangeana para el problema TSCFL

La relajación Lagrangeana es una de las técnicas más usada para obtener cotas inferiores fuertes para problemas de localización capacitados además de ser una buena herramienta para generar soluciones heurísticas.

Dado el problema TSCFL**:**

(TSCFL)

$$mín \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

Sujeto a: $(v,y,x) \in S$,

donde S= P[(D), (C),(B),(T),(S),(CF),(FM),(F),(I_y),(I_x)].

Como el problema TSCFL es una extensión del problema SSCFL, la relajación lagrangeana puede realizarse de diferentes formas como puede verse en Klose [13] que relaja las restricciones (C) y (S) y obtiene la cota $Z_{cs.}$ KRonnqvist et al. (1997) proponen seis relajaciones Lagrangeanas distintas para este problema TSCFL. La mejor cota la obtienen de relajar las restricciones (D) y (FM). Marín y Pelegrín (1999) establecen dos tipos de formulaciones, con dos y tres índices para la variable asociada al suministro de la demanda de un cliente por una determinada planta.

Cortes Fenchel

Presentamos un resumen de la teoría de planos Fenchel, los detalles pueden verse en Boy (1992, 1993 y 1995) y Sáez (2000). Dado un problema de programación entera:

$$\begin{aligned} (PE) \qquad & mín \qquad && cx \\ & Sujeto\ a{:} && Ax \le b \\ & && x \in X, \end{aligned}$$

donde $X \subset \mathbb{R}^n$ una estructura especial, no vacía que contiene las restricciones de integralidad. Lo ideal sería obtener el óptimo global al resolver la relajación lineal de (PE) pero generalmente esto no sucede. Todo problema (PE) tiene asociado un problema llamado de separación es decir: sea: $S = \{x \in X: Ax \leq b\}$ el espacio de soluciones factibles de (PE). Dado $x^* \in \mathbb{R}^n$ determinar si $x^* \in conv(S)$ si no, hallar una desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ que sea satisfecha por todos los puntos de (*S*) pero violada por x^*. En general este problema no está resuelto. La metodología de los cortes Fenchel resuelve el problema de separación asociado a la estructura del problema (PE).

Sea $\hat{x}$ una solución factible de la relajación lineal de *conv*(*S*). Dado $\lambda \in \mathbb{R}^n$, se define $f(\lambda) = \text{máx}\{\lambda x: x \in X\}$ y $v(\lambda) = \lambda\hat{x} - f(\lambda)$ Una desigualdad válida de la forma $\lambda x \leq f(\lambda)$ se llama desigualdad Fenchel y si $v(\lambda) > 0$ entonces la desigualdad Fenchel recibe el nombre de plano de corte Fenchel. Boyd(1992) demuestra que existe un λ , tal que $v(\lambda) > 0$ si y sólo si $\hat{x} \notin conv(X)$ y que el valor de $v(\lambda)$ está asociado a la profundidad del corte. También demostró que λ puede restringirse a un dominio acotado Λ que contiene al origen en su interior.

Eligiendo el dominio Λ se tiene el problema de separación asociado a *conv*(*X*):

$$(Q) \qquad \{máx \quad v(\lambda): \ \lambda \in \Lambda \}$$

La función $v(\lambda)$ es cóncava, lineal a trozos y tiene información subgradiente, lo que permite que el problema de separación pueda ser resuelto por cualquier método de optimización no diferenciable: método subgradiente, de ascenso dual, de ajuste de multiplicadores. Además el dominio Λ puede ser restringido, lo que reduce el problema de separación.
Uno de los resultados más importantes de la relajación Lagrangeana presentado por Geoffrion (1974) es la equivalencia entre dualización y convexificación, demostrando que al resolver el dual lagrangeano (D_L) se obtiene la misma cota que el resolver la relajación lineal dual del siguiente problema:

$$(\boldsymbol{P}^*) \qquad \{ mín \quad cx: \ Ax \leq b \ ; \ x \in conv(X)\}$$

Que es el problema convexificado del primal asociado a la estructura *X.* El problema (P^*) quedaría resuelto si se conociese la descripción lineal de *conv*(*X*). Sáez (2000) demuestra que una vez elegido el dominio Λ ,

$$conv(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \lambda x \leq f(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Es decir, el conjunto de desigualdades Fenchel describe a *conv*(*X*), esto permite considerar la relajación lineal

$$\big(\boldsymbol{LP}(\boldsymbol{X})\big) \qquad \{mín \ \ cx: Ax \leq b; \ x \in \hat{X} \ \ , \lambda x \leq f(\lambda), \forall \ \lambda \in \Lambda\}$$

llamada relajación Fenchel asociada a (*X*), se resolverá con un algoritmo de planos de corte Fenchel.
Para resolver el problema de separación de forma eficiente, es importante la selección de la estructura (*X*), Sáez (2000) demuestra que es necesario que (*X*) tenga las siguientes propiedades:
. (*X*) no verifica la propiedad de integralidad, es decir que $conv(X) \subset \hat{X}$
. La optimización sobre (*X*) es relativamente fácil.
. (*X*) tiene que ser dispersa o separable.

Relajaciones Fenchel para el problema TSCFL
Considerando la formulación fuerte del problema TSCFL:
(TSCFL)

$$mín \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$\text{Sujeto a:} \quad (v, y, x) \in S$$

donde S= P[(D),(C),(B),(T),(S),(CF),(FM),(F),(I_y),(I_x)]. Es posible seleccionar estructuras especiales de las que se pueden obtener cortes Fenchel y una relajación lineal que genera una cota inferior fuerte. Los tipos de estructuras seleccionadas son: no secuenciales y secuenciales.

Estructuras No-Secuenciales

. Sea $T_1=P((C),(I))$. Es una estructura separable, entonces

$$conv(T_1) = \bigotimes_{j\in J} conv(T_1^j)$$

Considerando la relajación Lagrangeana de las restricciones (D), (S), (CF) y (F) y la relajación completa de las restricciones (B), (T) y (FM), el problema convexificado es:

$$mín \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$\text{Sujeto a:} \quad (v,y,x) \in P\big((D),(S),(CF),(F)\big) \cap conv(T_1)$$

La cota que se obtiene de resolver este problema es: $Z_{DS(CF)F}^{BT(FM)}$ es una estructura que satisface las condiciones para el uso del algoritmo de planos de corte Fenchel para lo cual se define en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ la función f^j,tal que

$$f^j(\lambda^j,\eta^j) = max\{\lambda^j y^j + \eta^j x^j : (\lambda^j, x^j) \in T_1^j\}$$

T_1^j no es de tipo mochila propiamente, ni un sistema de independencia, entonces para calcular el valor de $f^j(\lambda^j,\eta^j)$ se usa el cambio de variable $x^j = 1 - \bar{x}^j$ que reduce el problema a uno de tipo mochila 0 - 1.

El problema convexificado es equivalente a la siguiente relajación Fenchel:

(LP(T_1))

$$mín \quad \sum_{i}\sum_{j} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k}\sum_{j} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j} f_j x_j$$

$$\begin{aligned}
Sujeto\ a: \quad & \sum_{j} y_{kj} \quad \forall\, k \in K \\
& \sum_{k\in K} d_k y_{kj} \le u_j x_j \quad \forall\, j \in J \\
& \sum_{j} v_{ij} \le p_i \quad \forall\, i \in I \\
& \sum_{i} v_{ij} = \sum_{k} d_k\, y_{kj} \quad \forall\, j \in J \\
& (y,x) \in T_1 \\
& v_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i \in I, j \in J \\
& \sum_{j} \lambda_k^j y_k^j + \eta_k^j x_k^j \le f^j(\lambda^j,\eta^j)\ \forall\, j \in J, (\lambda^j,\eta^j) \in \Lambda_\infty
\end{aligned}$$

Los planos de corte Fenchel se obtienen de resolver el problema separador.

Problema Separador para la Relajación LP (T_1)
Para cada $j \in J$ el problema separador es:

$$(\boldsymbol{Q^j}) \qquad máx \qquad v^j(\lambda^j, \eta^j)$$
$$Sujeto\ a: \qquad (\lambda^j, x^j) \in \Lambda_\infty,$$

donde $(\lambda^j, \eta^j) = \sum_j \lambda_k^j \hat{y}_k^j + \eta^j \hat{x}^j - f^j(\lambda^j, \eta^j)$

$(\hat{y}^j, \hat{x}^j)$ es una solución fraccional y

$$\Lambda_\infty = \left\{(\lambda^j, \eta^j) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}: \left\|(\lambda^j, \eta^j)\right\|_\infty \le 1\right\}$$

el dominio del problema separador (Q^j) asociado a esta estructura se puede reducir de acuerdo a los valores de la solución fraccional de la siguiente forma:

Dada la solución fraccional $(\hat{y}^j, \hat{x}^j)$ existe (λ^j, x^j), maximizando $v^j(\lambda^j, \eta^j)$ que verifica: (*)

$$\begin{array}{lll} máx & v^j(\lambda^j, \eta^j) & \\ Sujeto\ a: & \lambda_k^j = 1, & si\ \ \hat{y}_k^j = 1 \\ & \lambda_k^j = 0, & si\ \ \hat{y}_k^j = 0 \\ (*) & 0 \le \lambda_k^j \le 1, & si\ \ 0 \le \hat{y}_k^j \le 1 \\ & \eta^j = 0, & si\ \ \hat{x}^j = 1 \\ & \eta^j = -1, & si\ \ \hat{x}^j = 0 \\ & -1 \le \eta^j \le 0, & si\ \ 0 < \hat{x}^j < 1 \end{array}$$

Considerando el cambio de variable $x^j = 1 - \hat{x}^j$ la estructura T_1^j se convierte en un sistema de independencia y además en una estructura mochila 0 - 1, propiedades que permiten aplicar el teorema 4.5 de Sáez (2000) y deshaciendo el cambio de variable se verifica (*) con mucha frecuencia la solución fraccional $(\hat{y}^j, \hat{x}^j)$ presenta muchos 0 y 1 y resulta de mucha eficiencia en la solución del problema de separación.

Observación:

La relajación lineal de la formulación débil, genera la cota $Z^{IBT(FM)} \le Z_{DS(CF)F}^{BT(FM)}$.

. Sea $T_2 = P((T),(I_x))$. Es una estructura del tipo mochila agregada, que se reduce a una mochila 0 - 1 usando el cambio de variable $x^j = 1 - \hat{x}^j$

Considerando la relajación Lagrangeana de las restricciones (*D*), (*C*), (*B*), (*S*), (*CF*) y (*F*) y la relajación completa de las restricciones (*FM*), entonces la cota que se obtiene y el problema convexificado es:

$$Z_{DCBS(CF)F}^{(FM)} \qquad mín \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$\text{Sujeto a:} \quad (v, y, x) \in P\big((D), (C), (B), (S)\ (CF), (F)\big) \cap conv(T_2)$$

T_2 es un conjunto disperso y no presenta la propiedad de integralidad, por lo tanto es posible la aplicación de la metodología de cortes Fenchel.
Se define en $\mathbb{R}^n$ la función:

$$f(\mu) = \left\{ max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j : x \in T_2 \right\}$$

El valor de f se determina resolviendo un problema de tipo mochila 0 - 1. El problema convexificado es equivalente a la siguiente relajación Fenchel
(*LP*(*T*$_2$))

$$mín \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$Sujeto\ a: \quad \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 1 \quad \forall\, k \in K$$

$$\sum_{k=1}^{r} d_k y_{kj} - u_j x_j \le 0 \quad \forall\, j \in J$$

$$y_{kj} - x_j \le 0 \quad \forall\, k \in K, j \in J$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \ge \sum_{k=1}^{r} d_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \le p_i \quad \forall\, i \in I$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_k\, y_{kj} \quad \forall\, j \in J$$

$$v_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i \in I, j \in J$$

$$y_{kj} \in \{0,1\} \quad \forall\, k \in K, j \in J$$

$$x_j \in \overline{T}_2 \quad \forall\, j \in J$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_j\, x_j \le f(\mu) \quad \forall\, j \in J, \mu \in \Lambda_\infty$$

Comparando con la relajación lagrangeana, en ésta el número de variables del problema separador es a los más *n*, número que representa a los depósitos, mientras que en la relajación lagrangeana se necesitan determinar multiplicadores para cada conjunto de restricciones relajadas que son $r + 2n + r \times n + m + m \times n$, por lo tanto se genera un problema dual Lagrangeano difícil con muchas variables. Otra ventaja es que esta estructura puede usarse para generar soluciones heurísticas y obtener cotas superiores.

Problema Separador para la Relajación LP (T_2)
T_2 no es un sistema de independencia, pero las variables x tienen la propiedad de superioridad. Si $(\hat{v}, \hat{y}, \hat{x})$ es una solución fraccional, para determinar el hiperplano que separa el vector $\hat{x}$ del politopo mochila $conv(T_2)$ se debe resolver el siguiente problema:

$$(\mathbf{P}^*) \qquad \max \qquad v(\mu)$$

$$Sujeto\ a: \qquad \mu \in \Lambda_\infty,$$

donde: $v(\mu) = \mu\hat{x} - f(\mu)$ y $\Lambda_\infty = \{\mu \in \mathbb{R}^n : \|\mu\|_\infty \leq 1\}$. Por la propiedad de superioridad de las variables x y si $\hat{x}$ es una solución fraccional, es posible fijar valores para el multiplicador μ que ayuda a reducir el problema separador:

$$
\begin{array}{llll}
(\mathbf{Q}^*) & \max & v(\mu) & \\
& Sujeto\ a: & -1 \leq \mu_J \leq 0, & si\ \ 0 < \hat{x}_j < 1 \\
& & \mu_j = 0, & si\ \ \hat{x}_j = 1 \\
& & \mu_j = -1, & si\ \ \hat{x}_j = 0
\end{array}
$$

. Sea $T_3 = P((C), (B), (T), (I))$. Considerando la relajación Lagrangeana de las restricciones (D), (S), (CF), (F) y la relajación completa de las restricciones (FM), la cota y el problema convexificado asociado a esta estructura es:

$$
\begin{array}{lll}
Z_{DS(CF)F}^{(FM)} & mín & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \\
& \text{Sujeto a:} & (v, y, x) \in P\big((D), (C), (CF), (F)\big) \cap conv(T_3)
\end{array}
$$

T_3 es una estructura que no es separable ni dispersa y aunque no presenta la propiedad de integralidad, lo que permitirá aplicar la metodología de cortes Fenchel. Pero resolver el problema separador para obtener los cortes es un trabajo muy difícil y complicado con un alto consumo de tiempo, por lo tanto, esta estructura se abordará usando descomposición lagrangeana.

b) Estructura Secuencial

Dada la estructura T3 = P((C), (B), (T), (I)) no separable ni dispersa y el problema separador difícil de resolver.

$$
\text{Pero } P\big((C), (B), (T), (I)\big) = P\big((C), (B), (I)\big) \cap P\big((T), (I_x)\big) = T_1 \cap T_2 \text{ entonces}
$$
$$
conv(T_3) \subseteq conv(T_1) \cap conv(T_2).
$$

Lo que significa que si remplazamos la estructura T_3 por la secuencial T_1 y T_2 se obtiene una relajación más fuerte, además de obtener cortes Fenchel para cada una de ellas como se ha visto en la sección anterior. Usando las estructuras secuenciales el problema convexificado es:

$$
\begin{array}{ll}
mín & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \\
\text{Sujeto a:} & (v, y, x) \in P\big((D), (S), (CF), (F)\big) \cap conv(T_1) \cap conv(T_2)
\end{array}
$$

La cota que se genera de esta relajación es equivalente a la cota que se generaría de aplicar la descomposición lagrangeana al problema ***(TSCFL).*** Como T_1 y T_2 son estructuras de las que se obtienen cortes Fenchel de la forma:

$$
\sum_{j} \lambda_k^j y_k^j + \eta_k^j x_k^j \leq f^j(\lambda^j, \eta^j) \ \ \forall\, j \in J, (\lambda^j, \eta^j) \in \Lambda_\infty
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \leq f(\mu) \quad \forall\, j \in J, \mu \in \Lambda_\infty\,,
$$

Respectivamente. La relajación Fenchel asociada a T_3 es:

(*LP(T₃)*)

$$mín \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}v_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$Sujeto\ a: \quad \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 1 \quad \forall\, k \in K$$

$$\sum_{k=1}^{r} d_k y_{kj} - u_j x_j \leq 0 \quad \forall\, j \in J$$

$$y_{kj} - x_j \leq 0 \quad \forall\, k \in K, j \in J$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \sum_{k=1}^{r} d_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \leq p_i \quad \forall\, i \in I$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_k\, y_{kj} \quad \forall\, j \in J$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i \in I, j \in J$$

$$\left(y_{kj}, x_j\right) \in \bar{T}_3$$

$$\sum_{k} \lambda_k^j y_k^j + \eta^j x^j \leq f^j\left(\lambda^j, \eta^j\right) \leq f^j\left(\lambda^j, \eta^j\right) \ \forall\, j \in J, \left(\lambda^j, \eta^j\right) \in \Lambda_\infty$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j\, x_j \leq f(\mu) \quad \forall\, j \in J, \mu \in \Lambda_\infty$$

Las restricciones (D), (S), (CF), (T), (F), (I_x) son completamente diferentes en las variables *y*, *v* y *x,* la convexificación de T_2 solo involucra a la variable *x,* entonces

$$P\big((D),(S),(CF),(F)\big) \cap conv(T_2) = conv\big((D),(S),(CF),(F),T_2\big)$$

La cota que se obtiene que está relajación es: $Z_{DS(CF)FT/CB}^{(FM)}$

Las cotas que se generan de las siguientes estructuras presentan la siguiente relación:
Teorema

a) $Z_{DS(CF)F}^{BT(FM)} \leq Z_{DS(CF)FT/CB}^{(FM)}$
b) $Z_{DCBS(CF)F}^{(FM)} \leq Z_{DS(CF)FT/CB}^{(FM)}$

Demostración
a) La relación de orden entre estas cotas es siempre verdadera pues:

$$P\big((D),(S),(CF),(F)\big) \cap conv\big((C),(I)\big) \cap conv\big((T),(I_x)\big) \subset P\big((D),(C),(CF),(F)\big) \cap conv\big((C),(I)\big)$$

b) Para demostrar la segunda relación consideremos lo siguiente:

Como

$$P\big((D),(S),(CF),(F)\big) \cap conv\big((C),(I)\big) \cap conv\big((T),(I_x)\big) \subset P\big((D),(C),(CF),(F)\big) \cap conv\big((C),(I)\big)$$

y además $conv((C),(I)) \subset P((C),(B))$

entonces el teorema queda demostrado.

V. CONCLUSIONES

1. Los cortes Fenchel es una herramienta que genera una buena cota inferior para el **(TSCFL)**.
2. Las cotas generadas por este método pueden ser incluidos en el método enumerativo Branch and Bound.
3. Los cortes Fenchel resuelven el problema de separación asociado al **(PE).**

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aardal, K., Y. Pochet, L.A. Wolsey. (1995). *Capacitated facility location: valid inequalities and facts* Math. Oper. Res. 20, 562-582.

Aardal, K., S. Hoesel. (1995). *Polyhedral Techniques in combinatorial optimization II: Computations*, Report UU-CS-1995-42, Utrecht University.

Aardal, k., M. Labbé, J. Leung, M. Queyranne. (1996). *On the Two-level Uncapacitated Facility* Loction *Problem* Informs J. Computing. 8, 289-301.

Aardal, K., S. Hoesel. (1996) *Polyhedral techniques in combinatorial optimization I: Theory,* Statist. Neerlandica, 50, 3-26.

Boyd A. (1992). *Fenchel cutting planes for integer program* J.Oper. Res. 42 (1), 53-63.

Boyd A. (1993). *Generating Fenchel cutting planes for Knapsack Poliyhedra*, Siam J. Optimization. vol-3, pp 734-750.

Boyd A. (1995). *On the convergence of Fenchel cutting planes in Mixed-integer programming*, SIAM J. Optimization, vol 5, nº 2, 421-435.

Cornuéjols, G., R. Sridharam, J.M.Thizy. (1991). *A comparasion of heuristics and relaxations for the capacitates plant location problem*, European J. oper. 50, 28-297.

Geoffrion, A.M. (1974). *Lagrangean relaxation and its uses in integer programming*, Math. Pro.Stu. 2, 82-114.

Geoffrion, A.M., G.W. Graves. (1974). *Multicommodity distribution system design by Benders decomposition*, Mgmt Sci. 20, 822-844.

Hindi, K.S., T. Basta. (1991). *Computationally Efficcient solution of a multiproduct, two-stage distribution-location problem*, Op. Res. Soc. vol.45 nº 11, 1316-1323.

Kaufman, L., M. Van Eede, P. Hansen. (1977). *A plant and warehouse location problem*, Opl. Res. Q 28, 547-554.

Klose, A. (1995). *A lagrangean heuristic to solve the two-stage capacitated facility location problem*, Proceedings of the second International Workshop on Distribution Logistics, The Netherlands.

Klose, A. (1999). *An LP-based heuristic for two-stage capacitated facility location problems*, J. Oper. Res. Soc. 50, 157-166.

Klose, A. (2000). *A lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem*, European J. of Op.res. 126, 408-421.

Marín A., B. Pelegrín. (1999). Applying Lagrangian relaxation to the resolution of two-stage location problems, Annals of Operation Research 86, 179-198.

Sáez, J. (2000). *Solving linear programmnig relaxations associated with Lagrange relaxations by Fenchel cutting planes*, Eur.J.Oper. 121, 609-626.

Tcha, D., B. Lee. (1984). A branch and bound algorithm for the multi-lavel uncapacitated facility location problem, Eur. J. Opl.Res. 18, 35-43.

Tragantalerngsak, S., J. Holt, M. Rönnqvist. (1997). Lagrangian heuristics for the two-echelon, sigle-source, capacitated facility location problem, European Journal of Operational Research 102, 611-625.